Introduction à la logique

Paul Égré

21/09/2021

Informations pratiques

- le TD: impératif de vous préinscrire sur le site du département
- Première séance du TD: lundi prochain 27 septembre
- Jakob Süskind: jakob.suskind@ens.fr

Dois-je suivre ce cours ?

- OUI si pas fait de logique avant
- NON si déjà fait de la logique avant

Dois-je suivre ce cours ?

- OUI si pas fait de logique avant
- NON si déjà fait de la logique avant

"J'ai fait B/L / j'ai eu le Bac S / ...": OUI, vous devez suivre si vous êtes élève philosophe du département, sauf si vous avez validé une UE de logique en licence

Validation

Assiduité + rendu des DM

Aucun devoir en retard ne sera accepté

Comment rendre les DM?

Validation

Assiduité + rendu des DM

Aucun devoir en retard ne sera accepté

Comment rendre les DM? En CM le jour dit. Sinon dans BAL département de philo. En ligne sur Moodle sous réserve de confirmation.

Qu'est-ce que la logique ?

- un organon (Aristote)
- la science de la démonstration (Aristote, Frege)
- un art de penser (Arnaud et Nicole)
- une théorie du raisonnement correct (Boole)
- la théorie des "types généraux variés de déduction" (Russell)

Logique et calcul

Dans la vie courante: une faculté, ce qui me permet de résoudre une grille de sudoku, de résoudre une équation, de suivre un raisonnement, d'argumenter pour ou contre, etc...

Un exemple d'argument: le syllogisme

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme

Socrate est mortel

Un syllogisme aristotélicien

Tous les linguistes sont chimistes
Certains chimistes sont dentistes

Certains linguistes sont dentistes

Argument à une seule prémisse

Descartes:

$$\frac{\text{Je pense}}{\text{Je suis}}$$

Argument à une seule prémisse

Descartes:

Je pense
———
Je suis

Gassendi:

Je marche
———
Je suis

Le soleil s'est levé tous les matins jusqu'à aujourd'hui

Le soleil se lèvera demain

La lumière est éteinte
L'interrupteur est en position "allumé"

L'ampoule est cassée

Personne n'a pu démontrer que les fantômes existent

Les fantômes n'existent pas

$$\frac{\text{Personne n'a pu démontrer que les fantômes existent}}{\text{Les fantômes n'existent pas}}$$

$$\frac{\text{Personne n'a pu démontrer que les fantômes n'existent pas}}{\text{Les fantômes existent}}$$

Aucun des essais n'a démontré que ce médicament était toxique

---

Ce médicament n'est pas toxique.

Aucun des essais n'a démontré que ce médicament était toxique

---

Ce médicament n'est pas toxique.

Aucun des essais n'a démontré que ce médicament n'était pas toxique

---

Ce médicament est toxique

Un argument entendu lors de la primaire écologiste

5 septembre 2021

Si le PIB croît, alors les émissions de gaz à effet de serre croissent.
Il faut faire décroître les émissions de gaz à effet de serre.

Il faut faire décroître le PIB

Enoncé vs Argument

- **Un énoncé**: une phrase qui par sa forme grammaticale est évaluable comme vraie ou fausse
- **Un argument**: une suite d'énoncés comportant un ensemble de prémisses et une conclusion (séparée par "donc")
- **La vérité**: propriété d'un énoncé
- **La validité**: propriété d'un argument ou d'une inférence

Déduction, Induction, Abduction

- Une *inférence déductive*: une inférence telle que la conclusion est censée suivre de la seule forme des prémisses de façon **absolument certaine**

Déduction, Induction, Abduction

- Une *inférence déductive*: une inférence telle que la conclusion est censée suivre de la seule forme des prémisses de façon **absolument certaine**
- Une *inférence inductive*: une inférence telle que la conclusion ne suit pas de la seule forme des prémisses. La conclusion suit des prémisses avec une certaine **probabilité** seulement. L'induction est toujours une inférence risquée.

Déduction, Induction, Abduction

- Une *inférence déductive*: une inférence telle que la conclusion est censée suivre de la seule forme des prémisses de façon **absolument certaine**
- Une *inférence inductive*: une inférence telle que la conclusion ne suit pas de la seule forme des prémisses. La conclusion suit des prémisses avec une certaine **probabilité** seulement. L'induction est toujours une inférence risquée.
- On distingue aussi certaines inférences comme *abductives* (Peirce): l'inférence en question est défaisable (comme pour l'induction), mais la conclusion est censée fournir une **explication** d'au moins une des prémisses. On parle aussi pour l'abduction d'inférence à la meilleure explication ("inference to the best explanation", une terme forgé par G. Harman)

Validité et Correction

- La validité ne concerne que la forme de l'argument et le lien entre la vérité supposée des prémisses et celle de la conclusion.
- La correction revient à se demander si les prémisses de l'argument et la conclusion sont effectivement vraies ou pas.

Un argument dont la correction est disputée

Tout cas dans lequel un être humain vivant est tué est mauvais.
Tout cas d'avortement est un cas dans lequel un être humain vivant est tué.

Tout cas d'avortement est mauvais.

Sextus sur les biens par nature

“Le feu qui chauffe par nature apparaît échauffant à tout le monde, et la neige qui refroidit par nature apparaît refroidissante à tous, et tout ce qui agit par nature agit de la même manière sur tous ceux qui sont, comme ils disent, dans un état naturel. Mais aucun de ce qu’on appelle les biens n’agit sur tout le monde en tant que bien, comme nous allons le suggérer. Il n’y a donc pas de bien par nature.” Sextus Empiricus, Esquisses pyrrhoniennes III, 23.

Sophisme? ou argument inductif?

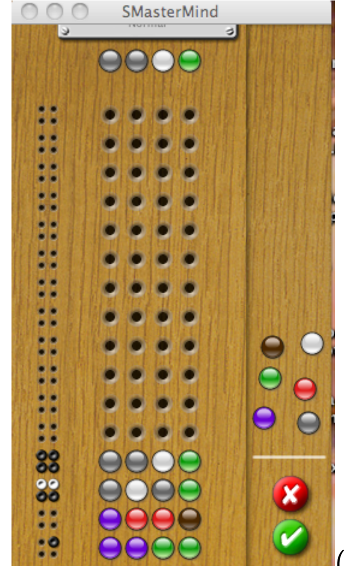
Frédéric Adnet, Libération du 9 juin 2020

l'artémisia est largement utilisée en Afrique dans le traitement préventif du paludisme (vrai). Les pays africains sont moins touchés par le Covid-19 (vrai) donc l'artémisia est efficace contre le Covid-19 [?].

Tout ce qui agit par nature agit de la même manière sur tout le monde
Aucun des biens n'agit sur tout le monde de la même manière

Il n'y a pas de bien par nature.

Le Master Mind



(Crédits: SMastermind)

Sudoku

	2		1	7	8		3	
	4		3		2		9	
1								6
		8	6		3	5		
3								4
		6	7		9	2		
9								2
	8		9		1		6	
	1		4	3	6		5	

Logique inductive / Déductive

- Argument déductif: censé être valide a priori, purement en vertu de sa forme
- Argument inductif: non déductivement valide, mais telle que les prémisses confèrent une plus ou moins grande probabilité à la conclusion

Logique propositionnelle (1)
Syntaxe et sémantique

Paul Égré

Séance 2 - 28/09/2021

Quelques exemples

(1) a. Ulysse est revenu.
    b. p

Quelques exemples

(1) a. Ulysse est revenu.
    b. p

(2) a. Ulysse n'est pas revenu.
    b. $\neg p$

Quelques exemples

(1) a. Ulysse est revenu.
    b. p

(2) a. Ulysse n'est pas revenu.
    b. $\neg p$

(3) a. Dominique ment
    b. q

Quelques exemples

(1) a. Ulysse est revenu.
    b. p

(2) a. Ulysse n'est pas revenu.
    b. $\neg p$

(3) a. Dominique ment
    b. q

(4) a. Nicolas a raison.
    b. r

(5) a. Dominique ment et Nicolas a raison
b. $q \wedge r$

(5) a. Dominique ment et Nicolas a raison
b. $q \wedge r$

(6) a. Dominique ment ou Nicolas a raison
b. $q \vee r$

(5) a. Dominique ment et Nicolas a raison
b. $q \wedge r$

(6) a. Dominique ment ou Nicolas a raison
b. $q \vee r$

(7) a. Si Dominique ment alors Nicolas a raison.
b. $q \rightarrow r$

(5) a. Dominique ment et Nicolas a raison
b. $q \wedge r$

(6) a. Dominique ment ou Nicolas a raison
b. $q \vee r$

(7) a. Si Dominique ment alors Nicolas a raison.
b. $q \rightarrow r$

(8) a. Dominique ment si et seulement si Nicolas a raison.
b. $q \leftrightarrow r$

(5) a. Dominique ment et Nicolas a raison
b. $q \wedge r$

(6) a. Dominique ment ou Nicolas a raison
b. $q \vee r$

(7) a. Si Dominique ment alors Nicolas a raison.
b. $q \rightarrow r$

(8) a. Dominique ment si et seulement si Nicolas a raison.
b. $q \leftrightarrow r$

(9) a. Si Ulysse est revenu, alors Dominique ment ou Nicolas a raison.
b. $p \rightarrow (q \vee r)$

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. "il pleut")

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d’une formule A (ex. “il ne pleut pas”)

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d’une formule A (ex. “il ne pleut pas”)
- la conjonction $(A \wedge B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut et il fait froid”)

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d'une formule A (ex. “il ne pleut pas”)
- la conjonction $(A \wedge B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut et il fait froid”)
- la disjonction $(A \vee B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut ou il fait froid”)

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d'une formule A (ex. “il ne pleut pas”)
- la conjonction $(A \wedge B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut et il fait froid”)
- la disjonction $(A \vee B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut ou il fait froid”)
- le conditionnel matériel $(A \rightarrow B)$ de deux formules A et B (“s'il pleut alors il fait froid”)

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d'une formule A (ex. “il ne pleut pas”)
- la conjonction $(A \wedge B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut et il fait froid”)
- la disjonction $(A \vee B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut ou il fait froid”)
- le conditionnel matériel $(A \rightarrow B)$ de deux formules A et B (“s'il pleut alors il fait froid”)
- le biconditionnel matériel $(A \leftrightarrow B)$ de deux formules A et B (“il pleut si et seulement si il fait froid”)

Formules bien formées

Une formule est:

- un atome: p (ex. “il pleut”)
- la négation $\neg A$ d’une formule A (ex. “il ne pleut pas”)
- la conjonction $(A \wedge B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut et il fait froid”)
- la disjonction $(A \vee B)$ de deux formules A et B (ex. “il pleut ou il fait froid”)
- le conditionnel matériel $(A \rightarrow B)$ de deux formules A et B (“s’il pleut alors il fait froid”)
- le biconditionnel matériel $(A \leftrightarrow B)$ de deux formules A et B (“il pleut si et seulement si il fait froid”)
- rien d’autre n’est une formule.

Exemples

1. $(p \wedge (p \vee q))$

Exemples

1. $(p \wedge (p \vee q))$
2. $((p \vee q) \rightarrow \neg(q \wedge r))$

Exemples

1. $(p \wedge (p \vee q))$
2. $((p \vee q) \rightarrow \neg(q \wedge r))$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$

Arbres de dérivation

$$p \wedge q \vee \neg r$$

Arbres de dérivation

$$p \wedge q \vee \neg r$$

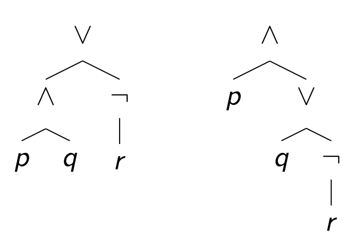
$$((p \wedge q) \vee \neg r) \qquad (p \wedge (q \vee \neg r))$$

Notation polonaise

(10) a. $\vee \wedge pq\neg r$ $[AKpqNr]$

Notation polonaise

(10) a. $\vee \wedge pq\neg r$ $[AKpqNr]$
b. $\wedge p \vee q\neg r$ $[KpAqNr]$



Sémantique

- En logique propositionnelle, les formules sont interprétées à l'aide des notions de vérité et fausseté. Le vrai et le faux sont deux notions primitives que nous représenterons pas 1 et 0.

Sémantique

- En logique propositionnelle, les formules sont interprétées à l'aide des notions de vérité et fausseté. Le vrai et le faux sont deux notions primitives que nous représenterons pas 1 et 0.
- On interprète les formules relativement à ce qu'on appelle une **distribution de valeur de vérité**: une fonction v qui assigne à chacun des atomes de la formule une valeur 0 ou 1

Negation

A	$\neg A$
1	0
0	1

Negation

A	$\neg A$
1	0
0	1

$v(\neg A) = 1$ ssi $v(A) = 0$

Negation

A	$\neg A$
1	0
0	1

$v(\neg A) = 1$ ssi $v(A) = 0$
$v(\neg A) = 1 - v(A)$

Conjunction

A	B	$(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Conjunction

A	B	$(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$v(A \wedge B)$ ssi $v(A) = v(B) = 1$

Conjunction

A	B	$(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$v(A \wedge B)$ ssi $v(A) = v(B) = 1$
$v(A \wedge B) = \min(v(A), v(B))$

Disjonction

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Disjonction

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$v(A \vee B) = 1$ ssi $v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$

Disjonction

A	B	$(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$v(A \vee B) = 1$ ssi $v(A) = 1$ ou $v(B) = 1$
$v(A \vee B) = \max(v(A), v(B))$

Conditionnel matériel

- Sextus Empiricus, *Adv. Math*, VIII
  “Philon disait que le conditionnel est vrai lorsqu’il ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu’il y a pour ce conditionnel trois façons d’être vrai et une d’être faux”

Conditionnel matériel

- Sextus Empiricus, *Adv. Math*, VIII
  "Philon disait que le conditionnel est vrai lorsqu'il ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu'il y a pour ce conditionnel trois façons d'être vrai et une d'être faux"

- Frege à Husserl 1906
  "Mais supposons que les lettres 'A' et 'B' désignent des propositions propres. Alors il n'y a pas seulement des cas dans lesquels A est vrai et des cas dans lesquels A est faux; mais soit A est vrai, soit A est faux; *tertium non datur*. La même chose vaut de B. On a donc quatre combinaisons:
  A est vrai et B est vrai
  A est vrai et B est faux
  A est faux et B est vrai
  A est faux et B est faux.
  De celles-ci la première, troisième et quatrième sont compatibles avec la proposition "si A alors B", mais non la seconde."



Conditionnel matériel

A	B	$(A \to B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Conditionnel matériel

A	B	$(A \rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$v(A \rightarrow B) = 1 \quad ssi \quad v(A) \leq v(B)$$

Conditionnel matériel

A	B	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Conditionnel matériel

A	B	$\neg(A \wedge \neg B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Biconditionnel

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Biconditionnel

A	B	$(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$v(A \leftrightarrow B) = 1 \; ssi \; v(A) = v(B)$$

Evaluation d'une formule complexe

Soit la formule: $A := (p \to (p \wedge \neg q))$. Comment l'évaluer ? En construisant pas à pas sa table de vérité:

p	q	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$(p \to (p \wedge \neg q))$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

(12) $\models (p \to p)$ (principe d'identité)

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

(12) $\models (p \rightarrow p)$ (principe d'identité)

(13) $\models \neg(p \wedge \neg p)$ (principe de non-contradiction)

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

(12) $\models (p \rightarrow p)$ (principe d'identité)

(13) $\models \neg(p \wedge \neg p)$ (principe de non-contradiction)

(14) $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (affaiblissement de l'antécédent)

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

(12) $\models (p \rightarrow p)$ (principe d'identité)

(13) $\models \neg(p \wedge \neg p)$ (principe de non-contradiction)

(14) $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (affaiblissement de l'antécédent)

(15) $\models (p \wedge q) \rightarrow p$ (version conjonctive de l'affaiblissement)

Tautologies et contradictions

On écrit: $\models A$ pour dire que A est une formule vraie quelle que soit la distribution de valeur de vérité à ses atomes.

(11) $\models (p \vee \neg p)$ (principe du tiers-exclu)

(12) $\models (p \rightarrow p)$ (principe d'identité)

(13) $\models \neg(p \wedge \neg p)$ (principe de non-contradiction)

(14) $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$ (affaiblissement de l'antécédent)

(15) $\models (p \wedge q) \rightarrow p$ (version conjonctive de l'affaiblissement)

(16) $\models ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow p))$ (équivalence matérielle entre les deux précédentes)

Formules neutres

(17) p

Formules neutres

(17) p

(18) $(p \to q)$

Contradictions vs. Invalidités

Attention: $\not\models A$ ne veut pas dire: $\models \neg A$

Formule vs Schéma de formule

Une formule est une suite bien formée de symboles du *langage-objet*:

(19) $(p \wedge (q \rightarrow r))$

Un schéma de formule tient lieu d'une infinité de formules possibles, par exemple:

(20) $(A \wedge (B \rightarrow C))$

Langage-objet vs Métalangage

Pour représenter une formule quelconque, nous utilisons des variables du *métalangage*, à savoir $A, B, C, \ldots$. La suite de symboles qui précède n'est pas une formule du langage-objet, mais un schéma de formule du métalangage. On obtient une formule si on décide que les symboles A, B, C, représentent des formules spécifiques. Par exemple, avec $A := (p \to q)$, $B := (r \to r)$ et $C := \neg q$, on obtient :

(21) $((p \to q) \wedge ((r \to r) \to \neg q))$

Conséquence logique

On dit qu'un ensemble de prémisses $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ a pour conséquence logique la conclusion B ssi pour toute valuation v, si $v(A_1) = ... = v(A_n) = 1$ alors $v(B) = 1$

On note le fait que B est conséquence logique des A_i:
$A_1, ..., A_n \models B$

$\models A$ signifie que A est conséquence de zéro prémisses, donc est une tautologie.

Propriétés structurelles de la conséquence logique

Voici trois propriétés dites structurelles de la conséquence logique, mises en avant notamment par Tarski:

- $A \models A$ (réflexivité)
- Si $A \models B$ alors $A, C \models B$ (monotonie)
- Si $A \models B$ et $B \models C$ alors $A \models C$ (transitivité)

Autres schémas valides

(22)	$A, (A \rightarrow B) \models B$	(modus ponens)
(23)	$(A \rightarrow B), \neg B \models \neg A$	(modus tollens)
(24)	$A \models (A \vee B)$	(introduction de la disjonction)
(25)	$A \wedge B \models A$	(élimination de la conjonction)
(26)	$\neg\neg A \models A$	(élimination de la double négation)
(27)	$A \models \neg\neg A$	(introduction de la double négation)
(28)	$A \vee B, \neg A \models B$	(syllogisme disjonctif)

Arguments et schémas d'argument

Il faut faire une différence entre un schéma d'argument et un argument spécifique, comme nous avions fait une différence entre formule et schéma de formule:

(29) $p, (p \rightarrow q) \models q$

signifie qu'un argument spécifique est valide.

(30) $A, (A \rightarrow B) \models B$

signifie qu'on peut remplacer A et B par n'importe quelles formules bien formées. C'est donc un schéma d'argument, qui tient lieu d'une infinité d'arguments spécifiques possibles.

Validités et Invalidités en Logique propositionnelle

Paul Égré

Séance 3 - 05/10/2021

I. Le lemme de substitution

Priorité des connecteurs

Dans certains cas, nous pouvons omettre les parenthèses des formules quand cela ne prête pas à ambiguïté, à condition de fixer des règles de priorité des connecteurs selon l'ordre : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. On considère que chaque connecteur dans la liste lie plus étroitement que le suivant les symboles qui le suivent.

(1) $\neg p \wedge q \vee r$ signifie $((\neg p \wedge q) \vee r)$

En pratique : mieux vaut garder les parenthèses, là où elles sont nécessaires

Conséquence logique

• On dit qu'un ensemble de prémisses $\Gamma = \{A_1, ..., A_n\}$ a pour conséquence logique la conclusion B ssi pour toute valuation v, si $v(A_1) = ... = v(A_n) = 1$ alors $v(B) = 1$

• On note le fait que B est conséquence logique des A_i :
$A_1, ..., A_n \models B$

• $\models A$ signifie que A est conséquence de zéro prémisses, donc est une tautologie.

Propriétés structurelles de la conséquence logique

Voici trois propriétés dites structurelles de la conséquence logique, mises en avant notamment par Tarski :

- $A \models A$ (réflexivité)
- Si $A \models B$ alors $A, C \models B$ (monotonie)
- Si $A \models B$ et $B \models C$ alors $A \models C$ (transitivité)

Autres schémas valides

(2)	$A, (A \rightarrow B) \models B$	(modus ponens)
(3)	$(A \rightarrow B), \neg B \models \neg A$	(modus tollens)
(4)	$A \models (A \vee B)$	(introduction de la disjonction)
(5)	$A \wedge B \models A$	(élimination de la conjonction)
(6)	$\neg\neg A \models A$	(élimination de la double négation)
(7)	$A \models \neg\neg A$	(introduction de la double négation)
(8)	$A \vee B, \neg A \models B$	(syllogisme disjonctif)

Arguments et schémas d'argument

Il faut faire une différence entre un schéma d'argument et un argument spécifique, comme nous avions fait une différence entre formule et schéma de formule :

(9) $p, (p \to q) \models q$

signifie qu'un argument spécifique est valide.

(10) $A, (A \to B) \models B$

signifie qu'on peut remplacer A et B par n'importe quelles formules bien formées. C'est donc un schéma d'argument, qui tient lieu d'une infinité d'arguments spécifiques possibles.

Substitution

Une substitution σ est une fonction des atomes dans les formules, qui s'étend à toutes les formules comme suit :

$$
\begin{aligned}
\sigma(p) &= B \\
\sigma(\neg A) &= \neg\sigma(A) \\
\sigma(A \wedge B) &= \sigma(A) \wedge \sigma(B) \\
\sigma(A \vee B) &= \sigma(A) \vee \sigma(B) \\
\sigma(A \rightarrow B) &= \sigma(A) \rightarrow \sigma(B) \\
\sigma(A \leftrightarrow B) &= \sigma(A) \leftrightarrow \sigma(B)
\end{aligned}
$$

Soit $\sigma(p) = (\neg p \vee q)$, et σ laisse les autres atomes identiques.

$$\begin{aligned} \sigma((p \rightarrow q)) &= \sigma(p) \rightarrow \sigma(q) \\ &= (\neg p \vee q) \rightarrow q \end{aligned}$$

- Soit une valuation v, et une substitution σ. On définit $v^\sigma(p) := v(\sigma(p))$
- v^σ est la valuation qui associe à chaque atome la valeur que v associe à la substitution de p.
- Supposons que $v(p) = 1$, et $v(q) = 0$. Alors $v^\sigma(p) = v(\sigma(p)) = v(\neg p \vee q) = 0$.

Théorème

Etant donné une valuation v et une substitution σ, pour toute formule A, on a :

$$v(\sigma(A)) = v^{\sigma}(A)$$

Démonstration.

La preuve se fait par récurrence sur la complexité de la formule A : on le montre pour A atomique, puis on étend la preuve par récurrence pour le cas d'une formule complexe A.

□

Théorème

Etant donné un ensemble de formules Γ, *et une formule* A *on a :*
$\Gamma \models A$ *ssi pour toute substitution* $\sigma(\Gamma) \models \sigma(A)$

Démonstration.

(Le sens de DàG) il suffit de prendre pour σ la substitution triviale qui associe chaque formule à elle-même.

(Le sens de GàD) supposons $\Gamma \models A$, et supposons que $v(\sigma(\Gamma)) = 1$, ce qui signifie que pour toute formule B de Γ, on a : $v(\sigma(B)) = 1$. Alors par le lemme, $v^{\sigma}(B) = 1$. D'où il suit que $v^{\sigma}(A) = 1$ (sachant $\Gamma \models A$), et par le lemme de nouveau, $v(\sigma(A)) = 1$.

□

Clôture des validités par substitution

L'ensemble des validités propositionnelles est donc clos par substitution : on peut donc représenter un argument valide ou bien par une formule particulière, en tenant compte du fait que toute instance de substitution est valide, ou par un schéma d'argument.

II. Quelques schémas d'arguments

Le symbole falsum

$\perp$ est un nouveau symbole logique nullaire, tel que pour toute valuation $v(\perp) = 0$.

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$
$0 \times 2 = 0$

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$
$0 \times 2 = 0$
Donc $0 \times 1 = 0 \times 2$ *(par transitivité de l'égalité)*

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$
$0 \times 2 = 0$
Donc $0 \times 1 = 0 \times 2$ *(par transitivité de l'égalité)*
Supposons que l'on peut diviser par 0. Alors :

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$
$0 \times 2 = 0$
Donc $0 \times 1 = 0 \times 2$ *(par transitivité de l'égalité)*
Supposons que l'on peut diviser par 0. Alors :
$\frac{0}{0} \times 1 = \frac{0}{0} \times 2$

La réfutation

(11) Si $A \models \bot$, alors $\models \neg A$ (si A aboutit à une contradiction, alors A est réfutée, peut être rejetée)

▷ Impossibilité de diviser par zéro :

$0 \times 1 = 0$
$0 \times 2 = 0$
Donc $0 \times 1 = 0 \times 2$ *(par transitivité de l'égalité)*
Supposons que l'on peut diviser par 0. Alors :
$\frac{0}{0} \times 1 = \frac{0}{0} \times 2$
D'où, par simplification : $1 = 2$, *mais* $1 \neq 2$ *:*
contradiction. Donc on ne peut diviser par 0.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

Donc $n^2 = 2m^2$. Il en résulte que 2 divise n^2, et 2 divise n (car le carré de tout nombre impair est impair, à vérifier par vous-même).

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

Donc $n^2 = 2m^2$. Il en résulte que 2 divise n^2, et 2 divise n (car le carré de tout nombre impair est impair, à vérifier par vous-même).

Donc

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ (2k)^2 &= 2m^2 \\ 4k^2 &= 2m^2 \\ m^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

Donc $n^2 = 2m^2$. Il en résulte que 2 divise n^2, et 2 divise n (car le carré de tout nombre impair est impair, à vérifier par vous-même).

Donc

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ (2k)^2 &= 2m^2 \\ 4k^2 &= 2m^2 \\ m^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Donc 2 divise m^2 et divise m (même argument).

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

Donc $n^2 = 2m^2$. Il en résulte que 2 divise n^2, et 2 divise n (car le carré de tout nombre impair est impair, à vérifier par vous-même).

Donc

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ (2k)^2 &= 2m^2 \\ 4k^2 &= 2m^2 \\ m^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Donc 2 divise m^2 et divise m (même argument).Donc n et m ne forment pas une fraction irréductible : contradiction.

L'irrationalité de $\sqrt{2}$

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ avec pour cette dernière fraction une fraction irréductible. Alors $(\frac{n}{m})^2 = 2$.

Donc $n^2 = 2m^2$. Il en résulte que 2 divise n^2, et 2 divise n (car le carré de tout nombre impair est impair, à vérifier par vous-même).

Donc

$$\begin{aligned} n &= 2k \\ (2k)^2 &= 2m^2 \\ 4k^2 &= 2m^2 \\ m^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

Donc 2 divise m^2 et divise m (même argument).Donc n et m ne forment pas une fraction irréductible : contradiction. Conséquence : $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas sous la forme $\frac{n}{m}$, donc n'est pas rationnel.

La preuve par l'absurde (*proof by reductio*)

(12) Si $\neg A \models \bot$, alors $\models A$

$\triangleright$ Euclide, Livre I des *Eléments*, Proposition 6 : *si un triangle a deux angles égaux, alors les côtés opposés à ces angles égaux sont égaux entre eux*. Le schéma de la preuve est : "supposons que ces côtés ne sont pas égaux entre eux. Il en résulte une contradiction. Donc les côtés sont bien égaux entre eux".

Noter que la preuve d'Euclide a réellement la forme suivante :

(13) Pour prouver que $\Gamma \models A$, on montre que $\Gamma, \neg A \models \bot$

Comparaison

Remarque : quelle est la différence entre réfuter un énoncé et prouver par l'absurde ? La réfutation vise au rejet, la preuve vise au contraire à l'acceptation. En logique classique (celle que nous étudions), les deux schémas d'inférence ne se distinguent pas, mais ils se distinguent dans certaines logiques non-classiques, comme en logique intuitionniste.

$$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg A} \rightarrow \mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg A] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{A} \text{ RAA (Reductio ad Absurdum)}$$

• $\neg A \equiv (A \to \bot)$, donc la réfutation est une forme acceptable pour l'intuitionniste, juste une façon de décharger une hypothèse en l'antécédent d'un énoncé conditionnel.

• L'intuitionniste accepte que $A \models \neg\neg A$, mais pas que $\neg\neg A \models A$.

• Noter que les deux exemples plus haut ont des conclusions négatives (indivisibilité par 0, irrationalité de $\sqrt{2}$), et non positives.

Le modus ponens

(14) $A \rightarrow B, A \models B$

Le modus ponens

(14) $A \rightarrow B, A \models B$

▷ "Si x est un nombre dont la somme des chiffres est divisible par 3, alors x est divisible par 3. La somme de 31782 est divisible par 3. Donc 31782 est divisible par 3."

Le modus tollens

(15) $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$

Le modus tollens

(15) $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$

▷ "Si x est un nombre divisible par 3, alors la somme de ses chiffres est divisible par 3. La somme des chiffres de 3079 n'est pas divisible par 3. Donc 3079 n'est pas divisible par 3."

Le raisonnement par cas

(16) Si $A \models C$ et $B \models C$, alors $A \vee B \models C$

Une version particulière de cet argument serait :

(17) Si $A \models C$ et si $\neg A \models C$, alors $\models C$

Le raisonnement par cas

(16) Si $A \models C$ et $B \models C$, alors $A \vee B \models C$

Une version particulière de cet argument serait :

(17) Si $A \models C$ et si $\neg A \models C$, alors $\models C$

$\triangleright$: “Soit x un nombre réel différent de 0. On veut montrer que $x^2 > 0$. On considère deux cas : si $x > 0$, alors $x^2 > 0$. Et si $x < 0$, alors $x^2 > 0$. Donc $x^2 > 0$.”

On peut généraliser ce schéma de raisonnement à un nombre arbitraire fini de cas :

(18) Si $A_1 \models C$, et $A_2 \models C$,...et $A_n \models C$, alors $A_1 \vee A_2 \vee ... \vee A_n \models C$

Prouver une équivalence

En mathématiques, il est fréquent d'avoir à prouver que deux propriétés sont équivalentes, ce qu'on note parfois informellement par le symbole $\Leftrightarrow$.

Prouver une équivalence

En mathématiques, il est fréquent d'avoir à prouver que deux propriétés sont équivalentes, ce qu'on note parfois informellement par le symbole $\Leftrightarrow$.

Plus haut nous avons énoncé un théorème de substitution, ce théorème dit : $\Gamma \models A$ si et seulement si pour toute substitution σ, $\sigma(\Gamma) \models \sigma(A)$.

Prouver une équivalence

En mathématiques, il est fréquent d'avoir à prouver que deux propriétés sont équivalentes, ce qu'on note parfois informellement par le symbole $\Leftrightarrow$.

Plus haut nous avons énoncé un théorème de substitution, ce théorème dit : $\Gamma \models A$ si et seulement si pour toute substitution σ, $\sigma(\Gamma) \models \sigma(A)$.

Pour prouver ce "si et seulement si", nous avons prouvé deux directions : le "si" et le "seulement si". Ce raisonnement est à rattacher à la sémantique du biconditionnel. Il vous faut notamment remarquer que :

Prouver une équivalence

En mathématiques, il est fréquent d'avoir à prouver que deux propriétés sont équivalentes, ce qu'on note parfois informellement par le symbole $\Leftrightarrow$.

Plus haut nous avons énoncé un théorème de substitution, ce théorème dit : $\Gamma \models A$ si et seulement si pour toute substitution σ, $\sigma(\Gamma) \models \sigma(A)$.

Pour prouver ce "si et seulement si", nous avons prouvé deux directions : le "si" et le "seulement si". Ce raisonnement est à rattacher à la sémantique du biconditionnel. Il vous faut notamment remarquer que :

$(A \leftrightarrow B) \models (A \to B) \wedge (B \to A)$
$(A \to B) \wedge (B \to A) \models (A \leftrightarrow B)$

III. Comment établir la validité ou invalidité d'un argument ?

Rappel : un argument de la forme $\Gamma \models A$, où Γ est un ensemble fini de prémisses, est valide ssi chaque fois que les prémisses de Γ sont vraies ensemble, A est vraie.

Rappel : un argument de la forme $\Gamma \models A$, où Γ est un ensemble fini de prémisses, est valide ssi chaque fois que les prémisses de Γ sont vraies ensemble, A est vraie.

• $\Gamma \models A$ ssi : pour toute valuation v telle que $v(B) = 1$ pour tout énoncé $B \in \Gamma$, on a : $v(A) = 1$.

• $\Gamma \not\models A$ ssi : il existe une valuation v telle que $v(B) = 1$ pour tout $B \in \Gamma$, mais telle que $v(A) = 0$.

Un argument valide

p	q	$p \to q$	
1	1	1	✓
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

Un argument invalide

Soit l'argument suivant : $p \rightarrow q, r \vee p \models r \rightarrow q$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$r \vee p$	$r \rightarrow q$	
1	1	1	1	1	1	
1	1	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	
1	0	0	0	1	1	
0	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	$\times$
0	0	0	1	0	1	

Equivalence logique entre formules

• Deux formules A et B sont logiquement équivalentes ssi $A \models B$ et $B \models A$. On notera $A \equiv B$ "A et B sont des formules logiquement équivalentes".

Equivalence logique entre formules

• Deux formules A et B sont logiquement équivalentes ssi $A \models B$ et $B \models A$. On notera $A \equiv B$ "A et B sont des formules logiquement équivalentes".

(19) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(20) $\neg\neg A \equiv A$

Equivalence logique entre formules

• Deux formules A et B sont logiquement équivalentes ssi $A \models B$ et $B \models A$. On notera $A \equiv B$ "A et B sont des formules logiquement équivalentes".

(19) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

(20) $\neg\neg A \equiv A$

• La relation d'équivalence logique $\equiv$ est une relation réflexive, symétrique et transitive, encore appelée relation d'équivalence entre formules.

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

(21) $\quad A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

(21) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(22) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

(21) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(22) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

(23) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

(21) $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(22) $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

(23) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$

(24) $\bot \equiv A \wedge \neg A$

Interdéfinissabilité des connecteurs

La logique propositionnelle a une propriété importante : tous les connecteurs sont définissables à partir soit de $\{\wedge, \neg\}$, ou alors de $\{\vee, \neg\}$. Nous montrons ici comment définir $\vee$, $\rightarrow, \leftrightarrow$ à partir de la négation et la conjonction.

$$A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \quad (21)$$

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \quad (22)$$

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A) \quad (23)$$

$$\bot \equiv A \wedge \neg A \quad (24)$$

$$\top \equiv A \vee \neg A \quad (25)$$

De Morgan, Distributivité

Lois de de Morgan :

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (26)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \quad (27)$$

De Morgan, Distributivité

Lois de de Morgan :

(26) $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B$

(27) $\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

Distributivité des opérateurs :

(28) $A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$

De Morgan, Distributivité

Lois de de Morgan :

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \tag{26}$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{27}$$

Distributivité des opérateurs :

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \tag{28}$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \tag{29}$$

Le théorème de la déduction

Quel lien y a-t-il entre le symbole du langage-object $\rightarrow$ et le symbole du métalangage $\models$?

Théorème (Déduction)

$$A \models B \quad \textit{ssi} \quad \models A \rightarrow B$$

Le théorème de la déduction

Quel lien y a-t-il entre le symbole du langage-object $\rightarrow$ et le symbole du métalangage $\models$?

Théorème (Déduction)

$$A \models B \;\; ssi \;\; \models A \rightarrow B$$

Démonstration.

• Supposons que $A \models B$. Alors toute valuation v telle $v(A) = 1$ est telle que $v(B) = 1$. Soit une valuation v quelconque. Montrons que $v(A \rightarrow B) = 1$. Nous raisonnons par cas :
- soit $v(A) = 0$, et alors $v(A \rightarrow B) = 1$
- soit $v(A) = 1$, et par l'hypothèse, $v(B) = 1$, d'où $v(A \rightarrow B) = 1$.

Le théorème de la déduction

Quel lien y a-t-il entre le symbole du langage-object $\rightarrow$ et le symbole du métalangage $\models$?

Théorème (Déduction)

$$A \models B \;\; ssi \;\; \models A \rightarrow B$$

Démonstration.

• Supposons que $A \models B$. Alors toute valuation v telle $v(A) = 1$ est telle que $v(B) = 1$. Soit une valuation v quelconque. Montrons que $v(A \rightarrow B) = 1$. Nous raisonnons par cas :
- soit $v(A) = 0$, et alors $v(A \rightarrow B) = 1$
- soit $v(A) = 1$, et par l'hypothèse, $v(B) = 1$, d'où $v(A \rightarrow B) = 1$.

• Supposons que $\models A \rightarrow B$. Alors pour toute valuation v, $v(A \rightarrow B) = 1$. Soit une valuation telle que $v(A) = 1$. Par hypothèse, $v(A \rightarrow B) = 1$. Montrons (par l'absurde !) que $v(B) = 1$. Si $v(B) = 0$, alors $v(A \rightarrow B) = 0$, ce qui est une contradiction. Donc $v(B) = 1$. □

Théorème

Théorème

Pour tout ensemble fini de prémisses $A_1, ..., A_n$ *:*

$$A_1, ..., A_n \models B \text{ ssi } \models (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$$

Démonstration.

$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$ *est équivalent à* $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow ... \rightarrow (A_n \rightarrow B)...)$. *Il suffit donc d'appliquer le théorème simple un nombre fini de fois.*

□

IV. Notions de théorie des ensembles

Ensembles

Dans la suite du cours nous aurons besoin de notions ensemblistes.

Un ensemble est pour nous une collection d'éléments que l'on peut représenter comme par exemple :

$D = \{1, 4, 6, 7\}$ ("l'ensemble qui contient les éléments 1, 4, 6 et 7")

Appartenance et inclusion

$D = \{1, 4, 6, 7\}$ ("l'ensemble qui contient les éléments 1, 4, 6 et 7")

On dit que $1 \in D$: "1 appartient à D".

Soit l'ensemble $A = \{4, 6\}$. Vous remarquez que tout élément de A est un élément de D. On écrit alors : $A \subseteq D$. On dit que : "A est inclus dans D"

Dans la suite du cours, nous pourrons parler d'ensemble de nombres, mais aussi d'ensemble de formules, ou de symboles, ou d'ensemble d'ensembles, ou d'ensemble de valuations, etc.

(30) $\{p \rightarrow q, r \vee q, \neg r\}$

(31) L'ensemble des parties de $\{8, 9, 2, 21\}$

(32) L'ensemble des valuations qui rendent vraies $(p \rightarrow r)$

Validités et invalidités en logique propositionnelle
Eléments de psychologie du raisonnement

Paul Égré

Classer les raisonnements

Une difficulté pour la théorie logique est que certains schémas de raisonnement sont invalides mais perçus comme valides (raisonnements spécieux, ou paralogismes), alors que d'autres sont valides mais perçus comme invalides (cf. Mascarenhas "repugnant validities").

Paralogismes, validités répugnantes, paradoxes

(1) Chaque propriétaire d'un appartement habite l'immeuble.
(??) Donc chaque appartement de l'immeuble est habité par un propriétaire.

Paralogismes, validités répugnantes, paradoxes

(1) Chaque propriétaire d'un appartement habite l'immeuble. (??) Donc chaque appartement de l'immeuble est habité par un propriétaire.

(2) Ce carré est rond et n'est pas rond. (??) Donc il existe de la vie sur Mars.

Paralogismes, validités répugnantes, paradoxes

(1) Chaque propriétaire d'un appartement habite l'immeuble. (??) Donc chaque appartement de l'immeuble est habité par un propriétaire.

(2) Ce carré est rond et n'est pas rond. (??) Donc il existe de la vie sur Mars.

(3) Si je dis que tu es un âne, alors je dis que tu es un animal. Si je dis que tu es un animal, alors je dis vrai. (??) Donc si je dis que tu es un âne, alors je dis vrai.

Biais de raisonnements

"What is a reasoning bias? In the literature on deductive inference, an accepted definition would be a systematic error relative to the accepted normative system for evaluating performance on the task, namely, formal logic. In particular, where variance in the data can be attributed to a logically irrelevant task feature, the term bias would normally be applied" (Evans et al. 1999)

Les conditionnels et la négation

(4) a. Si Pierre vient, Marie viendra.
    b. Si Marie vient, Pierre viendra.

(5) a. Si Pierre vient, Marie viendra.
    b. Si Marie ne vient pas, Pierre ne viendra pas.

Quatre schémas voisins

Schémas valides ou paralogismes?

(6) a. $A \rightarrow B, A \models B$ (MP)

b. $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (MT)

Quatre schémas voisins

Schémas valides ou paralogismes?

(6)
a. $A \rightarrow B, A \models B$ (MP)
b. $A \rightarrow B, \neg B \models \neg A$ (MT)

(7)
a. $A \rightarrow B, B \not\models A$ (Affirmation du conséquent) (AC)
b. $A \rightarrow B, \neg A \not\models \neg B$ (Négation de l'antécédent) (NA)

Performance des sujets

Tâche: décider si la conclusion suit des prémisses.

MP	presque 100% de bonnes réponses
MT	2/3 de bonnes réponses.
AC, NA	entre 1/3 et 2/3 de bonnes réponses.

(Evans, Newstead and Byrne 1993, Politzer 2004)

Le biconditionnel

AC et NC sont valides pour $\leftrightarrow$

(8) a. $A \leftrightarrow B, A \models B$
b. $A \leftrightarrow B, B \models A$

(9) a. $A \leftrightarrow B, \neg B \models \neg A$
b. $A \leftrightarrow B, \neg A \models \neg B$

La notion d'implicature

Une implicature est une inférence qui n'est pas logique, mais qui est rationnelle étant donné certains principe de rationalité afférents à la conversation (Ducrot, Grice)

- Ducrot 1971, loi d'exhaustivité: donner à son interlocuteur toute l'information disponible
- Grice 1967, Maxime de Quantité: rends ta contribution aussi informative que possible pour les besoins de la conversation; ne rends pas ta contribution plus informative que nécessaire.

Exemples

(10) (Geis et Zwicky 1971) Si tu tonds la pelouse, je te donnerai 5 euros.

Implicature : si tu ne tonds pas la pelouse, je ne te donnerai pas 5 euros.

(11) Quelques étudiants sont venus.

Implicature : Pas tous les étudiants sont venus.

L'expérience de Rumain, Connell, Braine 1983

(12) S'il y a un chien dans la boite, alors il y a une orange dans la boite.

(13) Il y a une orange dans la boite.

Groupe test voit une prémisse supplémentaire:

(14) S'il y a un tigre dans la boite, alors il y a une orange dans la boite.

Implicature (voulue): il peut y avoir une orange dans la boite sans qu'il y ait un chien dans la boite.

Amélioration des performances: seuls 30% commettent AC (contre 70% dans le groupe contrôle)

La perfection conditionnelle

Geis et Zwicky appellent “conditional perfection” la tendance à interpréter les conditionnels simples comme des biconditionnels. Von Fintel (2001) recense plusieurs exemples destinés à montrer que l’inférence n’est pas systématique, mais dépend du contexte.

(15)
a. Si Jean quitte son travail, il sera remplacé. (Boer et Lycan)
b. (?) Si Jean ne quitte pas son travail, il ne sera pas remplacé.
c. (?) Si Jean est remplacé, alors il quittera son travail.

Contexte: si on sait que Jean travaille à un poste très convoité, (15)-b n’est pas une inférence qui ferait nécessairement.

(16) a. Si cette plante pousse dans le Limousin, alors ce n'est pas un astrophytum. (Lilje 1972)

(16) a. Si cette plante pousse dans le Limousin, alors ce n'est pas un astrophytum. (Lilje 1972)
b. (?) Si cette plante ne pousse pas dans le Limousin, c'est un astrophytum.

(16) a. Si cette plante pousse dans le Limousin, alors ce n'est pas un astrophytum. (Lilje 1972)
b. (?) Si cette plante ne pousse pas dans le Limousin, c'est un astrophytum.
c. (?) Si cette plante n'est pas un astrophytum, alors elle pousse dans le Limousin.

Cornulier / von Fintel

(17) One can take this seat if one is disabled or one is older than 70,

For we can suppose, very roughly, that in [One can take this seat if one is disabled or if one is older than 70] the word "if" keeps its merely sufficient-condition meaning, and that the utterance situation suggests that if other sufficient conditions (allowing one to sit there) did exist, they would have been mentioned, so that the only mentioned property (to be disabled or to be older than 70) is the only property which gives one the right to sit there (presumption of exhaustivity). (Cornulier, 1983: 248)

Explication: "si A alors B" est vu comme la réponse exhaustive à une question de la forme "comment obtient-on B?".

La tâche de Wason

La tâche de Wason

Contexte: chaque carte a une lettre d'un côté et un nombre de l'autre.

(R) Si une carte comporte une voyelle d'un côté, elle comporte un nombre pair de l'autre côté. $[p \rightarrow q]$

La tâche de Wason

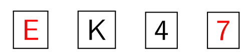
Contexte: chaque carte a une lettre d'un côté et un nombre de l'autre.

(R) Si une carte comporte une voyelle d'un côté, elle comporte un nombre pair de l'autre côté. $[p \rightarrow q]$

"Laquelle ou lesquelles de ces cartes dois-je retourner pour vérifier si la phrase suivante est vraie ou fausse ?"

E	K	4	7

“Laquelle ou lesquelles de ces cartes dois-je retourner pour vérifier si la phrase suivante est vraie ou fausse ?”



Performance des sujets

Exemple typique de réponses (d'après la réplication de Chiswell et Hodges)

E, 7	0%
E	50%
E, 4	20%
K, 7	15%
7	5%
K	5%
E, K, 4, 7	5%

Réponse correcte: E, 7. Réponses les plus typiques: E seule ou E, 4

Méta-analyse (Oaksford&Chater 1994): Ordre typique des réponses: E>4>7>K (plus généralement pour un conditionnel de la forme $p \to q$: $p > q > \neg q > \neg p$)

Quelques théories influentes

- Cosmides et Tooby 1992
- Sperber, Cara, Girotto 1995
- Oaskford et Chater 1994

La tâche déontique de Cosmides et Tooby

Scénario 1: Vous êtes employé dans une école et vous devez vous assurer que la secrétaire a correctement classé les dossiers, en appliquant la règle suivante:

(18) Si la personne est dans la catégorie D alors ses documents doivent être marqués avec un 3.

Devant vous il y a 4 cartes qui résument les informations sur 4 élèves de l'école (chaque carte comporte une lettre et un chiffre au dos).

D	F	3	7

Scénario 2: Vous êtes videur dans un bar, et vous perdrez votre emploi si vous n'appliquez pas correctement la mesure suivante:

(19) Si la personne boit de la bière, elle doit avoir plus de 20 ans.

Les cartes suivantes ont les informations concernant 4 clients.

Boit de la bière	Boit du Coca	a 25 ans	a 16 ans

.

Résultats et Interprétation

Moins de 25% des sujets choisissent les deux cartes correctes dans la tâche abstraite, contre plus de 75% dans la tâche concrète.

Hypothèse de Cosmides et Tooby: les sujets appliquent un "algorithme de détection des tricheurs", ils sont sensibles aux violations de certains contrats sociaux.

L'hypothèse du contrat social

Cosmides et Tooby 1992

Structure of Social Contract Problems

It is your job to enforce the following law:

Rule 1 - Standard Social Contract: "If you take the benefit, then you pay the cost."
(*If* *P* *then* *Q*)

Rule 2 - Switched Social Contract: "If you pay the cost, then you take the benefit."
(*If* *P* *then* *Q*)

The cards below have information about four people. Each card represents one person. One side of a card tells whether a person accepted the benefit and the other side of the card tells whether that person paid the cost.

Indicate only those card(s) you definitely need to turn over to see if any of these people are breaking this law.

	benefit accepted	benefit *not* accepted	cost paid	cost *not* paid
Rule 1	(*P*)	(*not-P*)	(*Q*)	(*not-Q*)
Rule 2	(*Q*)	(*not-Q*)	(*P*)	(*not-P*)

Hypothèse de familiarité

(20) Si l'on va à Boston, alors on doit prendre le métro.

Cartes:

Boston	Métro	Concord	Taxi

Hypothèse de familiarité

(20) Si l'on va à Boston, alors on doit prendre le métro.

Cartes:

Boston	Métro	Concord	Taxi

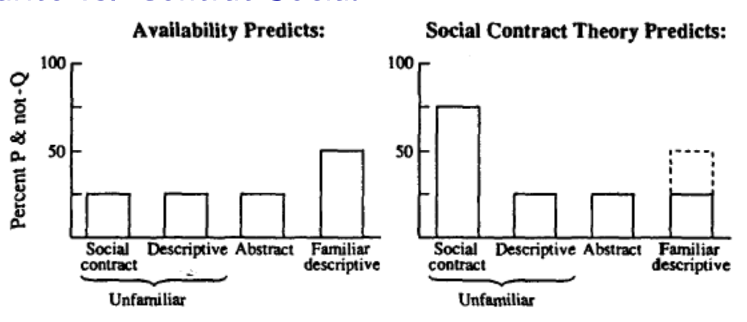
Hypothèse de familiarité: quelqu'un qui a l'habitude d'aller à Boston en taxi devrait retourner plus aisément la carte "taxi"

Familier descriptif: “si on va à Boston, on prend le métro”

Non-familier descriptif: “si vous mangez de la viande de duiker alors vous avez trouvé un oeuf d’autruche”

Non-familier social: “si un homme mange de la viande de cassava, il a un tatouage sur le visage”

Familiarité vs. Contrat Social



Results, Experiments 1 and 2

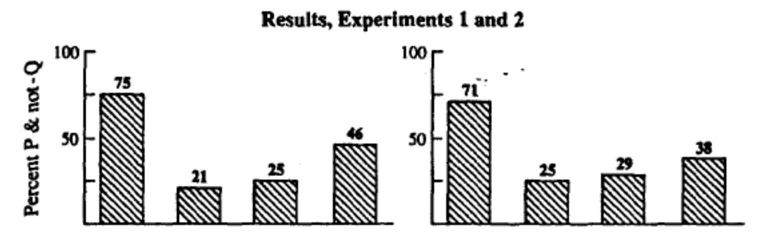


Figure 3.4 Social contract theory versus availability theory: Predictions and results for standard social contracts (from Cosmides, 1989, Experiments 1 and 2).

La théorie de la pertinence: Sperber, Cara, Girotto 1995

Thèse générale: la théorie de Cosmides et Tooby est trop restrictive; le contraste est l'effet particulier d'un phénomène plus général, qui consiste à rendre accessible le cas $A \wedge \neg B$, c'est-à-dire saillant cognitivement, ou pertinent. Quand le cas est rendu pertinent, les sujets sont plus enclins à considérer cette hypothèse.

Sperber, Cara, Girotto 1995

How to build an easy Selection Task

1) Select a pair of simple features *P* and *Q* such that the complex feature *P-and-(not-Q)* is, or can be made, easier to represent than the complex feature *P-and-Q*.

2) Create a context where knowing whether there are *P-and-(not-Q)* cases would have greater cognitive effects than knowing whether there are *P-and-Q* cases.

3) Present the rule "if P, then Q" in a pragmatically felicitous manner.

Warning: Don't explicitly ask subjects whether there are *P-and-(not-Q)* cases: you will get the right selection, but it won't be the right Selection Task anymore.

Fig. 4. The recipe.

Exemple d'une expérience-test

Scénario: M. Rossi et Mme Bianchi sont employés à la mairie de Padoue. Ils recherchent des volontaires pour s'occuper d'enfants. Mme Bianchi déclare: “les hommes ne s'intéressent pas aux enfants. S'il y a des volontaires, ce ne seront pas des hommes”. M. Rossi proteste en faisant remarquer que certains hommes s'intéressent aux enfants. Mme Bianchi rétorque: “les hommes célibataires en tout cas ne s'intéressent pas aux enfants” [“les hommes bruns aiment les enfants”]; “en tout cas, s'il y a un homme parmi les volontaires, il est marié” [resp. “s'il y a un homme parmi les volontaires, alors il a les cheveux bruns”].

“s’il y a un homme parmi les volontaires, il est marié”

“s’il y a un homme parmi les volontaires, il est brun”

Pertinence	Homme	Marié	Non-Marié	Femme
Non-Pertinence	Homme	Brun	Blond	Femme

16% des participants résolvent la tâche correctement dans la condition non-pertinente ($n = 19$) contre 65% dans la condition pertinente ($n = 17$) ($p < 0.01$)

"We have shown that easy descriptive versions of the task could be devised at will. The contrast between difficult descriptive versions and easy deontic ones collapses. We have argued that, from a psychological point of view, it is less relevant to classify a task according to its formal logical structure, than according to the cognitive abilities it evokes." Sperber et al. 1995:83

Chater et Oaskford 1994

Thèse principale: la vision de Wason de la tâche de sélection est falsificationniste (inspirée de Popper). Or il faut y voir non pas un biais de sélection dans les performances des sujets, mais une attitude rationnelle de test d'hypothèses (de nature bayésienne).

Oaskford and Chater 1994

(21) Si on mange des tripes, on tombe malade.

Comment tester l'hypothèse ? A qui demander ?

Oaskford and Chater 1994

(21) Si on mange des tripes, on tombe malade.

Comment tester l'hypothèse ? A qui demander ?

- Mangeur de tripes: oui, si malade, on augmente confiance dans l'hypothèse, si pas malade, on la diminue.
- Malade: oui, si a mangé tripes, augmente confiance, sinon, sans pertinence.
- Pas Malade: oui, si a mangé tripes, diminue confiance, sinon sans pertinence.
- Pas mangé tripes: non pertinent.

Conséquence de l'analyse OC

L'un des buts de l'analyse d'Oaskford et Chater est de montrer que les participants ne sont pas aussi irrationnels que le disait Wason. Ils cherchent à tester la règle comme une hypothèse, et en ce sens il est naturel qu'ils retournent la carte 4, et pas seulement la carte A et la carte 7.

Preuves en logique propositionnelle

Paul Egré

I. La notion de preuve

Preuve et vérité

Jusqu'à présent nous avons beaucoup parlé de vérité et de conséquence logique, mais pas de preuve.

Quels sont les liens entre ces notions ? Et qu'est-ce qu'une preuve ?

Un exemple de preuve: la preuve euclidienne

• **Euclide** pour la géométrie distingue **définitions, postulats et notions communes**. Les preuves d'Euclide disent explicitement quand elles font appel à une définition, à un postulat ou à une notion commune. En revanche, elles ne rendent pas explicites l'usage de règles logiques d'inférences. Les définition ne sont pas purement formelles.

Définitions, Postulats, Notions communes

(1) Definition 1. Un point est ce dont il n'y a pas de partie.

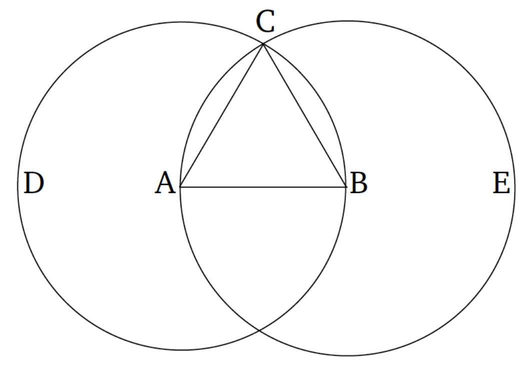
(2) Postulat 1. Il est possible de tracer une ligne droite de tout point vers tout point.

(3) Notion commune 1. Deux choses égales à une même troisième sont égales entre elles.

Une proposition et sa preuve

Proposition 1

To construct an equilateral triangle on a given finite straight-line.



Preuve d'Euclide

Let AB be the given finite straight-line.

So it is required to construct an equilateral triangle on the straight-line AB.

Let the circle BCD with center A and radius AB have been drawn [Post. 3], and again let the circle ACE with center B and radius BA have been drawn [Post. 3]. And let the straight-lines CA and CB have been joined from the point C, where the circles cut one another,[†] to the points A and B (respectively) [Post. 1].

And since the point A is the center of the circle CDB, AC is equal to AB [Def. 1.15]. Again, since the point B is the center of the circle CAE, BC is equal to BA [Def. 1.15]. But CA was also shown (to be) equal to AB. Thus, CA and CB are each equal to AB. But things equal to the same thing are also equal to one another [C.N. 1]. Thus, CA is also equal to CB. Thus, the three (straight-lines) CA, AB, and BC are equal to one another.

Thus, the triangle ABC is equilateral, and has been constructed on the given finite straight-line AB. (Which is) the very thing it was required to do.

Qu'est-ce qu'une preuve?

(chez Euclide, et plus généralement)

Une suite d'énoncés, qui s'appuie sur les définitions, postulats, notions communes, de façon à dériver la proposition voulue par une série d'étapes.

Remarques sur la preuve d'Euclide

- Elle utilise les postulats, les définitions, et les notions communes, pour aboutir à la conclusion.

Remarques sur la preuve d'Euclide

- Elle utilise les postulats, les définitions, et les notions communes, pour aboutir à la conclusion.
- Ici elle est lacunaire au sens où elle suppose l'existence d'une intersection entre les cercles, alors que cette intersection n'est pas formellement garantie (bien qu'elle le soit visuellement dans le plan).

Remarques sur la preuve d'Euclide

- Elle utilise les postulats, les définitions, et les notions communes, pour aboutir à la conclusion.
- Ici elle est lacunaire au sens où elle suppose l'existence d'une intersection entre les cercles, alors que cette intersection n'est pas formellement garantie (bien qu'elle le soit visuellement dans le plan).

Définitions implicites vs explicites

• L'un des grands mathématiciens de la fin du XIXè siècle est **D. Hilbert**, qui propose une axiomatisation nouvelle de la géométrie, où les définitions sont purement des définitions implicites (les notions de "point", "droite", sont définies non de façon explicite, mais via les axiomes où les notions interviennent, nous en verrons un exemple plus tard).

Cette démarche a conduit Hilbert à s'intéresser à la logique et à développer la logique mathématique (dans la foulée de Russell et Whitehead, et avant eux de Frege), notamment du fait de la structure quantificationnelle des énoncés mathématiques :

(4) Pour tout couple de points, il existe une droite qui les contient.

Axiomes et règles d'inférence

- **axiomes**: formules que l'on admet comme primitives, sans preuve
- **règles d'inférences**: relations entre formules qui, à partir des axiomes, permettent de dériver de nouvelles formules

Hypothèses

On utilise le terme d'hypothèse en deux sens:

- Un axiome
- Une formule admise comme si elle était un axiome (sans preuve, on alors dont la preuve est admise)

Notions formelle de preuve

Preuve: une preuve formelle est une suite de formules $(A_1, ..., A_n)$ telles que pour chaque i, soit A_i est un axiome, soit A_i résulte des formules qui précèdent par application d'une règle d'inférence.

Théorème

Théorème: une formule A telle que A est la dernière formule d'une suite $(A_1, ..., A_n)$ telle que cette suite est une preuve.

Etant donné un système T d'axiomes et de règles d'inférence, on note: $\vdash_T A$ le fait que A est un théorème dans T, ou plus simplement $\vdash A$ quand T est implicite dans le contexte.

Preuve à partir d'hypothèses

Soit Γ un ensemble d'énoncés admis comme hypothèses du raisonnement. On écrit que A est prouvable dans le système de preuve T à partir des hypothèses de Γ comme suit:

$$\Gamma \vdash_T A$$

II. Systèmes de Frege-Hilbert

Axiomes

(A1) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(A2) $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(A3) $\vdash ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow ((\neg q \rightarrow p) \rightarrow q)$

Règles d'inférence

- Modus ponens: de $\vdash A$ et $\vdash A \rightarrow B$, on peut inférer $\vdash B$.
- Substitution: dans un théorème, on peut substituer n'importe quelle formule à une formule propositionnelle (ie si $\vdash A[p]$ alors $\vdash A[\sigma(p)]$)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)
3. $\vdash p \to (q \to p)$ (A1)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)
3. $\vdash p \to (q \to p)$ (A1)
4. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)$ (3,S)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)
3. $\vdash p \to (q \to p)$ (A1)
4. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)$ (3,S)
5. $\vdash ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (2, 4, MP)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)
3. $\vdash p \to (q \to p)$ (A1)
4. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)$ (3,S)
5. $\vdash ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (2, 4, MP)
6. $\vdash (A \to (A \to A))$ (3,S)

Prouver que $A \to A$

Comment prouver $A \to A$?

1. $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ (A2)
2. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (1,S)
3. $\vdash p \to (q \to p)$ (A1)
4. $\vdash (A \to ((A \to A) \to A)$ (3,S)
5. $\vdash ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (2, 4, MP)
6. $\vdash (A \to (A \to A))$ (3,S)
7. $\vdash (A \to A)$ (5, 6, MP).

Correction d'un système de preuve

Etant donné un système de preuve pour la logique propositionnelle, on dit que ce système est sémantiquement **correct** (ou **fiable**) ssi tout théorème du système est valide logiquement:

$$\text{si} \vdash A \text{ alors} \models A$$

Complétude

• Réciproquement, on dit que le système est sémantiquement **complet** ssi toute tautologie est dérivable à partir des axiomes et règles d'inférences du système:

$$\text{si} \models A \text{ alors} \vdash A$$

Complétude forte

On dit qu'un système d'axiomes et de règles d'inférence est fortement complet ssi on a:

$$\Gamma \vdash A \textit{ ssi } \Gamma \models A$$

Complétude

Le système d'axiomes et règles d'inférence précédent est fortement complet pour la conséquence propositionnelle.

III. Méthode des arbres

Méthode des arbres sémantiques

La méthode des arbres sémantiques est une méthode de preuve par réfutation : Pour montrer que $\Gamma \models A$, on montre que $\Gamma \cup \{\neg A\}$ aboutit à une contradiction.

Pour chaque connecteur, on introduit un règle d'expansion de la formule qui le contient comme connecteur principal. On a deux types de règles pour chaque connecteur: règle simple, et règle pour la négation.

Les règles visent à simplifier les formules: le système de preuve est appelé analytique.

Exemple 1

1. $\vdash p \to (q \to p)$

Exemple 1

1. $\vdash p \to (q \to p)$

$$\neg(p \to (q \to p))$$

$$|$$

$$p$$

$$\neg(q \to p)$$

Exemple 1

1. $\vdash p \to (q \to p)$

$$\neg(p \to (q \to p))$$
$$|$$
$$p$$
$$\neg(q \to p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$
$$\times$$

Exemple 1

1. $\vdash p \to (q \to p)$

$$\neg(p \to (q \to p))$$
$$|$$
$$p$$
$$\neg(q \to p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$
$$\times$$

Exemple 1

1. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

$$\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$$

$$|$$

$$p$$

$$\neg(q \rightarrow p)$$

$$|$$

$$q$$

$$\neg p$$

Exemple 1

1. $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

$$\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p))$$
$$|$$
$$p$$
$$\neg(q \rightarrow p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$
$$\times$$

Règles pour les connecteurs



Règles pour les connecteurs

$$A \land B$$
$$|$$
$$A$$
$$B$$

$$\neg(A \land B)$$
$$\neg A \quad \neg B$$

$$A \lor B$$
$$A \quad B$$

$$\neg(A \lor B)$$
$$|$$
$$\neg A$$
$$\neg B$$

Règles pour les connecteurs

$A \wedge B$ → A, B (une seule branche)

$\neg(A \wedge B)$ → $\neg A$ | $\neg B$ (deux branches)

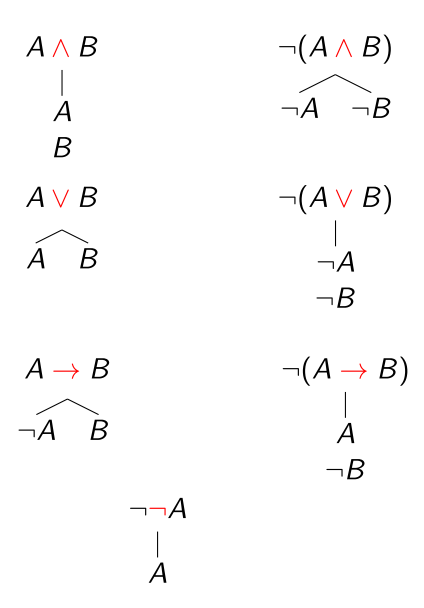
$A \vee B$ → A | B (deux branches)

$\neg(A \vee B)$ → $\neg A$, $\neg B$ (une seule branche)

$A \rightarrow B$ → $\neg A$ | B (deux branches)

$\neg(A \rightarrow B)$ → A, $\neg B$ (une seule branche)

Règles pour les connecteurs



La négation

Pourquoi n'y a-t-il qu'une seule règle pour la négation ?

On pourrait en principe énoncer aussi une règle pour la négation, en utilisant un système d'étiquettes 0 et 1, pour dire quand une formule est vraie et quand elle est fausse.

Dans ce cas on éliminerait entièrement les négations pour arriver à des branches qui contiennent un atome étiqueté avec 1 ou avec 0 pour chaque atome.

Ici en fait le système traite la négation comme une étiquette 0, et si on voit ainsi les choses alors la règle $\neg A, 1$ donne $A, 0$ revient à écrire que de $\neg A$ on peut inférer $\neg A$, ce qui rend superflu d'énoncer cette règle.

Principes

- On dit qu'une branche d'un arbre est fermée si elle comporte à la fois une formule et sa négation.

Principes

• On dit qu'une branche d'un arbre est fermée si elle comporte à la fois une formule et sa négation.

• Pour établir qu'une formule est prouvable, on construit le tableau à partir de sa négation, et on montre que toutes les branches de l'arbre sont fermées au sens où elles contiennent toutes à la fois une formule et sa négation.

• Si toutes les branches construites à partir de $\Gamma, \neg A$ ferment (comportent une formule et sa négation), alors $\Gamma \vdash A$.

• Si au moins une branche est ouverte, inversement, on peut extraire de la branche une valuation qui rend vraie $\Gamma, \neg A$.

Exemple 2

2. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Exemple 2

2. $(p \wedge q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$
\begin{array}{c}
(p \wedge q) \rightarrow r \\
\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \\
| \\
p \\
\neg(q \rightarrow r) \\
| \\
q \\
\neg r \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg(p \wedge q) \qquad r \\
\diagup \; \diagdown \qquad\quad \times \\
\neg p \quad \neg q \\
\times \quad\; \times
\end{array}
$$

3. Montrons que $(p \rightarrow q) \nvdash (q \rightarrow p)$

$$p \rightarrow q$$
$$\neg(q \rightarrow p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$
$$\neg p \quad q$$

3. Montrons que $(p \to q) \nvDash (q \to p)$

$$p \to q$$
$$\neg(q \to p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$

$$\neg p \qquad q$$

3. Montrons que $(p \to q) \nvdash (q \to p)$

$$p \to q$$
$$\neg(q \to p)$$
$$|$$
$$q$$
$$\neg p$$
$$\neg p \quad q$$

Complétude de la méthode

La méthode des arbres est fortement correcte et complète pour la validité en logique propositionnelle :

- si $\Gamma \models A$, alors l'arbre construit à partir de $\Gamma, \neg A$ ferme.
- Inversement, si l'arbre construit à partir de $\Gamma, \neg A$ ferme, alors $\Gamma \models A$.

IV. Systèmes d'équivalences

Système d'équivalences (Herbrand 1929)

1) $\vdash \top$

2) Lois de de Morgan
$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

3) Négation
$\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$
$\vdash \neg\top \leftrightarrow \bot$
$\vdash \neg\bot \leftrightarrow \top$

4) Lois d'associativité

$\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

$\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

5) Loi de commutativité

$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

6) Lois de distributivité

$\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

7) Idempotence

$\vdash (A \vee A) \leftrightarrow A$

$\vdash (A \wedge A) \leftrightarrow A$

8) Lois 0-1

$\vdash (A \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$

$\vdash (A \vee \bot) \leftrightarrow A$

$\vdash (A \vee \neg A) \leftrightarrow \top$

$\vdash (A \wedge \top) \leftrightarrow A$

$\vdash (A \vee \top) \leftrightarrow \top$

$\vdash (A \wedge \neg A) \leftrightarrow \bot$

9) Elimination du conditionnel

$\vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

$\vdash (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

10) Substitution des identiques

De $\vdash A \leftrightarrow B$ et de $\vdash C[A/p]$, inférer $\vdash C[B/p]$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$
$(B \vee (A \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \vee B) \vee A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$
$(B \vee (A \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \vee B) \vee A)$
$(B \vee \top) \wedge (\top \vee A)$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$
$(B \vee (A \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \vee B) \vee A)$
$(B \vee \top) \wedge (\top \vee A)$
$\top \wedge \top$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$
$(B \vee (A \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \vee B) \vee A)$
$(B \vee \top) \wedge (\top \vee A)$
$\top \wedge \top$
$\top$

Exemple

On veut montrer que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ est un théorème

Cette formule est équivalente à chacune des formules suivantes, par les lois qui précèdent

$\neg(A \to B) \vee (\neg B \to \neg A)$
$\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg\neg B \vee \neg A)$
$(\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \wedge \neg B) \vee (B \vee \neg A)$
$(A \vee (B \vee \neg A)) \wedge (\neg B \vee (B \vee \neg A))$
$(B \vee (A \vee \neg A)) \wedge ((\neg B \vee B) \vee A)$
$(B \vee \top) \wedge (\top \vee A)$
$\top \wedge \top$
$\top$

• Pour montrer que $\vdash A$, il suffit de montrer qu'il existe une chaine d'équivalences $(A \leftrightarrow A_1), (A_1 \leftrightarrow A_2), ..., (A_{n-1} \leftrightarrow \top)$ (cela suit de la règle de substitution)

Correction et complétude

On peut montrer que $\models A$ ssi $\vdash A$.

• Si $\vdash A$, il suit que $\models A$ car tous les axiomes sont des validités, et la validité est préservée par la règle de substitution des identiques.

• Si $\models A$, inversement, alors les règles du système permettent en fait de mettre A sous FND, et de montrer l'équivalence de cette FND avec $\top$ (cette partie est plus difficile à prouver rigoureusement)

Logique des Prédicats

Paul Egré

Objectifs

1. Fondements frégéens de la logique des prédicats
2. Syntaxe de la logique des prédicats
3. Le carré aristotélicien des oppositions
4. sémantique pour le fragment monadique (prédicats unaires)

I. Fondements

Frege: les prédicats comme fonctions

"On peut envisager de décomposer les propositions affirmatives comme les équations, les inéquations, et les expressions analytiques, en deux parties dont l'une est fermée sur soi et dont l'autre réclame un complément, est insaturée. On analysera par exemple la proposition "César conquit les Gaules" en "César" et "conquit les Gaules". La seconde partie est insaturée, elle traîne une place vide avec elle, et ce n'est qu'après avoir rempli cette place par un nom propre ou une expression qui représente un nom propre qu'on voit naître un sens fermé sur lui-même. J'appelle ici encore **fonction** *la dénotation de la partie insaturée. Dans ce cas* **l'argument** *est César" (Fonction et Concept, 1891)*

(1) César conquit les Gaules

(2) a. conquit-les-Gaules: $P(\ )$

b. César: c

(3) $P(c)$

Variable et généralité

- Puisqu'une fonction est une entité insaturée, il est naturel de représenter son caractère insaturé à l'aide d'une place vide, qui, quand on l'instancie par un objet, vient saturer la fonction. Mais, au lieu de représenter le prédicat "conquit-les-Gaules" comme:

(4) $P(\ )$

on peut aussi le représenter par:

(5) $P(x)$

comme on ferait pour dire qu'on a une fonction à un argument x, qui reste à spécifier.

Quantification

- Comment dire qu'une fonction est toujours vraie? On veut dire que: quel que soit l'argument qu'on donne à la fonction, la fonction rend la valeur "Vrai"

(6) $\forall x P(x)$

signifierait par exemple: "tout individivu x a conquit les Gaules"

Prédicats unaires et prédicats relationnels

De même qu'il y a des fonctions d'une variable et des fonctions de plusieurs variables, en calcul des prédicat, la grande et principale innovation de Frege est de distinguer des prédicats unaires et des prédicats *n*-aires (à *n* arguments):

(7) a. Socrate est assis.
 b. $A(a)$ (A: est assis; a: Socrate)

(8) a. Socrate regarde Alcibiade.
 b. $R(a, b)$ (R: regarde; a: Socrate; b: Alcibiade)

Fonction-Argument / Sujet-prédicat

La distinction frégéenne entre fonction et argument abolit la distinction grammaticale entre sujet et prédicat qu'on trouve chez Aristote et ses successeurs.

Fonction-Argument / Sujet-prédicat

La distinction frégéenne entre fonction et argument abolit la distinction grammaticale entre sujet et prédicat qu'on trouve chez Aristote et ses successeurs.

(9) a. Socrate regarde Alcibiade.
b. $R(a, b)$

(10) a. Pierre a présenté Suzanne à Marie.
b. $P(p, s, m)$

II. Syntaxe

Enoncés atomiques

(11) a. Ahmed est un homme
b. Ha

Enoncés atomiques

(11) a. Ahmed est un homme
b. *Ha*

(12) a. Ahmed court
b. *Ca*

Enoncés atomiques

(11) a. Ahmed est un homme
b. Ha

(12) a. Ahmed court
b. Ca

(13) a. Berangère est grande
b. Gb

Enoncés complexes

(14) a. Ahmed est un homme et Bérangère court.
b. $(Ha \wedge Cb)$

Enoncés complexes

(14) a. Ahmed est un homme et Bérangère court.
b. $(Ha \wedge Cb)$

(15) a. Ahmed n'est pas grand.
b. $\neg Ga$

Enoncés complexes

(14) a. Ahmed est un homme et Bérangère court.
b. $(Ha \wedge Cb)$

(15) a. Ahmed n'est pas grand.
b. $\neg Ga$

(16) a. il n'est pas vrai que si Ahmed est grand alors Bérangère court.
b. $\neg(Ga \rightarrow Cb)$

Enoncés quantifiés

(17) a. Tout individu est grand
b. $\forall x G x$

Enoncés quantifiés

(17) a. Tout individu est grand
b. $\forall x Gx$

(18) a. Au moins un individu est grand
b. $\exists x Gx$

Prédicats relationnels

(19) a. Ahmed regarde Bérangère.
b. Rab

Prédicats relationnels

(19) a. Ahmed regarde Bérangère.
b. Rab

(20) a. Ahmed regarde quelqu'un.
b. $\exists x Rax$

Prédicats relationnels

(19) a. Ahmed regarde Bérangère.
b. Rab

(20) a. Ahmed regarde quelqu'un.
b. $\exists x Rax$

(21) a. Quelqu'un regarde Ahmed.
b. $\exists x Rxa$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
     b. $\exists x \exists y Rxy$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

(25) a. Tout le monde regarde quelqu'un.

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

(25) a. Tout le monde regarde quelqu'un.
b. $\forall x \exists y Rxy$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

(25) a. Tout le monde regarde quelqu'un.
b. $\forall x \exists y Rxy$
c. $\exists y \forall x Rxy$

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

(25) a. Tout le monde regarde quelqu'un.
b. $\forall x \exists y Rxy$
c. $\exists y \forall x Rxy$

(26) a. Quelqu'un regarde tout le monde.

Quantification multiple

(22) a. Quelqu'un regarde quelqu'un.
b. $\exists x \exists y Rxy$

(23) a. Tout le monde regarde Ahmed.
b. $\forall x Rxa$

(24) a. Ahmed regarde tout le monde.
b. $\forall x Rax$

(25) a. Tout le monde regarde quelqu'un.
b. $\forall x \exists y Rxy$
c. $\exists y \forall x Rxy$

(26) a. Quelqu'un regarde tout le monde.
b. $\exists x \forall y Rxy$

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$
4. Les constantes d'individus: $a, b, c, \ldots$ [noms propres]

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$
4. Les constantes d'individus: $a, b, c, \ldots$ [noms propres]
5. Les variables d'individus: $x, y, z, \ldots$ [pronoms]

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$
4. Les constantes d'individus: $a, b, c, ...$ [noms propres]
5. Les variables d'individus: $x, y, z, ...$ [pronoms]
6. Les symboles de prédicats: $P, Q, R, ...$

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$
4. Les constantes d'individus: $a, b, c, ...$ [noms propres]
5. Les variables d'individus: $x, y, z, ...$ [pronoms]
6. Les symboles de prédicats: $P, Q, R, ...$

Les symboles de prédicats ont chacun une arité variable finie, spécifiée à l'avance:
- Symboles de prédicats unaires: $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, $R^{(1)}$,...
- Symboles de prédicats binaires: $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$,...
...

Morphologie

La logique des prédicats distingue plusieurs types de symboles:

1. Les connecteurs propositionnels: $\neg, \wedge, \rightarrow, \vee, \leftrightarrow$
2. Les parenthèses: $(,)$
3. Les symboles de quantificateurs: $\forall, \exists$
4. Les constantes d'individus: $a, b, c, ...$ [noms propres]
5. Les variables d'individus: $x, y, z, ...$ [pronoms]
6. Les symboles de prédicats: $P, Q, R, ...$

Les symboles de prédicats ont chacun une arité variable finie, spécifiée à l'avance:
- Symboles de prédicats unaires: $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$, $R^{(1)}$,...
- Symboles de prédicats binaires: $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$,...
...

(27) Au lieu de *Rab*, stricto sensu on devrait écrire: $R^{(2)}ab$

Termes singuliers, Atomes

- On appelle **terme singulier** un symbole de constante ou un symbole de variable

Termes singuliers, Atomes

- On appelle **terme singulier** un symbole de constante ou un symbole de variable
- Pour tout n, une **formule atomique** est de la forme $P^{(n)}t_1 \ldots t_n$, où chaque t_i est soit une constante d'individu, soit une variable d'individu, et $P^{(n)}$ est un symbole de prédicat d'arité n.

Formules bien formées

1. Une formule atomique est une formule bien formée.

Formules bien formées

1. Une formule atomique est une formule bien formée.
2. Si F est une formule bien formée, alors $\neg F$ aussi.

Formules bien formées

1. Une formule atomique est une formule bien formée.
2. Si F est une formule bien formée, alors $\neg F$ aussi.
3. Si F et F' sont des formules bien formées, alors $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $(F \rightarrow F')$ et $(F \leftrightarrow F')$ aussi

Formules bien formées

1. Une formule atomique est une formule bien formée.
2. Si F est une formule bien formée, alors $\neg F$ aussi.
3. Si F et F' sont des formules bien formées, alors $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $(F \rightarrow F')$ et $(F \leftrightarrow F')$ aussi
4. Si F est une formule bien formée, alors $\forall x F$ et $\exists x F$ le sont aussi.

Formules bien formées

1. Une formule atomique est une formule bien formée.
2. Si F est une formule bien formée, alors $\neg F$ aussi.
3. Si F et F' sont des formules bien formées, alors $(F \wedge F')$, $(F \vee F')$, $(F \rightarrow F')$ et $(F \leftrightarrow F')$ aussi
4. Si F est une formule bien formée, alors $\forall x F$ et $\exists x F$ le sont aussi.
5. Rien d'autre n'est une formule bien formée.

Énoncés aristotélicien

Quantité et qualité

	Affirmatif	**Négatif**
Universel	Tout le monde dance $\forall x Bx$	Personne ne dance $\forall x \neg Bx$
Particulier	Quelqu'un dance $\exists x Bx$	Quelqu'un ne dance pas $\exists x \neg Bx$

Contrariété et contradiction

	Affirmatif	**Négatif**
Universel	Tout le monde dance $\forall x Bx$	Personne ne dance $\neg \exists x Bx$
Particulier	Quelqu'un dance $\exists x Bx$	Pas tout le monde dance $\neg \forall x Bx$

Contrariété et contradiction

- Deux énoncés sont **contraires** s'ils ne peuvent être vrais ensemble, mais peuvent être faux ensemble.
- Deux énoncés sont **contradictoires** s'ils ne peuvent ni être faux ensemble, ni être vrais ensemble (la vérité de l'un entraîne la fausseté de l'autre, et réciproquement)
- Deux énoncés sont **sub-contraires** s'ils ne peuvent être faux ensemble, mais peuvent être vrais ensemble.

III. Sémantique (prédicats unaires)

Ensembles

Pour interpréter la logique des prédicats, nous utiliserons la notion d'ensemble d'objets.

Un ensemble est pour nous une collection d'éléments que l'on peut représenter comme par exemple:

$D = \{1, 4, 6, 7\}$ ("l'ensemble qui contient les éléments 1, 4, 6 et 7")

Appartenance et inclusion

$D = \{1, 4, 6, 7\}$ ("l'ensemble qui contient les éléments 1, 4, 6 et 7")

On dit que $1 \in D$: "1 appartient à D".

Soit l'ensemble $A = \{4, 6\}$. Vous remarquez que tout élément de A est un élément de D. On écrit alors: $A \subseteq D$. On dit que: "A est inclus dans D"

Structures d'interprétation

Une structure d'interprétation M est constituée d'un **domaine** d'interprétation D_M (un ensemble non-vide d'individus) et d'une **fonction d'interprétation** I_M qui associe:

- à chaque constante d'individu a un unique élément $I_M(a)$ du domaine D_M (ex. au nom "Socrate" l'individu Socrate)
- à chaque symbole de prédicat unaire P un sous-ensemble $I_M(P)$ du domaine D_M

Noms et substitutions

Pour chaque élément d du domaine D, nous supposerons qu'on peut le **nommer** par son propre nom dans le métalangage (donc d est le nom de d : usage autonyme).

• Etant donnée une formule A non quantifiée et contenant la variable x, nous noterons $A[d/x]$ la formule qui résulte de A lorsque l'on remplace chaque occurrence de x par d.

(28) soit A la formule $(Px \vee \neg Px)$. $A[d/x]$ est la formule $(Pd \vee \neg Pd)$.

Vérité des formules dans une structure

Etant donnée une structure $M = (D_M, I_M)$, nous écrirons:

- $I_M(Pa) = 1$ ssi $I_M(a) \in I_M(P)$
- $I_M(\neg A) = 1 - I_M(A)$
- $I_M(A \wedge B) = min(I_M(A), I_M(B))$
- $I_M(A \vee B) = max(I_M(A), I_M(B))$
- $I_M(A \rightarrow B) = 1$ ssi $I_M(A) \leq I_M(B)$
- $I_M(\forall xA) = 1$ ssi pour tout élément d de D, $I_M(A[d/x]) = 1$
- $I_M(\exists xA) = 1$ ssi il existe au moins un élément d de D tel que $I_M(A[d/x]) = 1$

Exemple

Soit la structure d'intrerprétation $M = (D, I)$ avec $D = \{1, 2, 3, 4\}$ et $I(P) = \{2, 3\}$.

Exemple

Soit la structure d'intrerprétation $M = (D, I)$ avec $D = \{1, 2, 3, 4\}$ et $I(P) = \{2, 3\}$.

Montrons que $\forall x Px$ est fausse dans M, mais que $\exists x Px$ est vraie dans M.

- $I_M(\forall x Px) = 0$ car $1 \notin \{2, 3\}$, donc ce n'est pas le cas que tout élément de D appartienne à $I_M(P)$.
- $I_M(\exists x Px) = 1$ car il existe au moins un élément de D, par exemple 2, tel que $I_M(P2) = 1$. En effet, cela signifie que $2 \in I_M(P)$, soit $2 \in \{2, 3\}$.

Quantification restreinte, Relations, Variables libres et liées

Paul Égré

I. La quantification restreinte

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x P x) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?
$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?
$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \land Qx)$?
$\exists x(Px \land \neg Qx)$?
$\forall x(Px \to Qx)$?
$\forall x(Px \land Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?
$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$?
$\forall x(Px \wedge Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?
$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$?
$\forall x(Px \wedge Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$?
$\exists x(Px \rightarrow Qx)$?

Interpréter une formule dans une structure

(1) Soit une structure M, avec $D_M = \{1, 2, 3, 4\}$,
$I_M(P) = \{1, 3\}$, $I_M(Q) = \{2, 4\}$

$I_M(\exists x Px) = 1$
car: il existe un individu, à savoir 3, tel que $I_M(P3) = 1$
En effet: $3 \in I_M(P)$.

Que valent:

$\forall x Px$?
$\exists x(Px \wedge Qx)$?
$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow Qx)$?
$\forall x(Px \wedge Qx)$?
$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$?
$\exists x(Px \rightarrow Qx)$?

Le carré des oppositions

Frege, Idéographie 1879

Tout A est B $\forall x(Ax \to Bx)$	Aucun A n'est B $\forall x(Ax \to \neg Bx)$
Quelque A est B $\exists x(Ax \wedge Bx)$	Quelque A n'est pas B $\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

(2) $\forall x(Ax \to Bx)$

Soit un domaine $M = (D_M, I_M)$.
Alors $I_M(\forall x(Ax \to Bx)) = 1$
ssi pour tout d dans D_M, $I_M((Ax \to Bx)[d/x]) = 1$
ssi pour tout d dans D_M, $I_M(A[d/x]) \leq I_M(B[d/x])$
ssi pour tout d dans D_M, $I_M(Ad) \leq I_M(Bd)$
ssi pour tout d dans D_M: si $I_M(d) \in I_M(A)$, alors $I_M(d) \in I_M(B)$
ssi $I_M(A) \subseteq I_M(B)$

(3) $\exists x(Ax \wedge Bx)$

Alors $I_M(\exists x(Ax \wedge Bx)) = 1$
ssi il y a un d dans D_M tel que $I_M((Ax \wedge Bx)[d/x]) = 1$
ssi il y a un d dans D_M tel que $I_M(A[d/x]) = I_M(B[d/x]) = 1$
ssi il existe d dans D_M tel que $I_M(Ad) = 1$ et $I_M(Bd) = 1$
ssi il y a un d dans D_M tel que $I_M(d) \in I_M(A)$ et $I_M(d) \in I(B)$
ssi $I_M(A) \cap I_M(B) \neq \emptyset$

(4) $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$

ssi pour tout d dans D_M, $I_M((Ax \rightarrow \neg Bx)[d/x]) = 1$
ssi pour tout d dans D_M, $I_M(A[d/x]) \leq I_M(\neg B[d/x])$
ssi pour tout d dans D_M, $I_M(Ad) \leq I_M(\neg Bd)$
ssi pour tout d dans D_M: si $I_M(d) \in I_M(A)$, alors $I_M(d) \notin I_M(B)$
ssi pour tout d dans D_M, on n'a pas à la fois: $I_M(d) \in I_M(A)$ et $I_M(d) \in I_M(B)$
ssi $I_M(A) \cap I_M(B) = \emptyset$

Pourrait-on traduire la quantification restreinte autrement?

Que signifierait:

(5) $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$?

(6) $\forall x(Ax \wedge Bx)$?

Pourrait-on traduire la quantification restreinte autrement?

Que signifierait:

(5) $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$?

(6) $\forall x(Ax \wedge Bx)$?

On peut montrer que $\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ n'est pas contradictoire avec $\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)$.

Exemple: soit M une structure à trois éléments avec $D = \{a, b, c\}$, et $I(A) = \{a\}$ et $I(B) = \{c\}$. On a: $I_M(\exists x(Ax \rightarrow Bx)) = 1$ et $I_M(\forall x(Ax \rightarrow \neg Bx)) = 1$.

$\exists x(Ax \rightarrow Bx)$ est vrai s'il existe un individu qui n'est pas A, donc en particulier s'il n'existe aucun A !

$\forall x(Ax \wedge Bx)$ est plus fort que $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$, puisque "tout homme est mortel" n'exige pas, par exemple, que toute chose soit un homme mortel.

II. Relations

À quoi sert la logique des prédicats ?

La première application d'un langage logique comme celui de la logique des prédicats concerne la description de structures relationnelles: domaine d'individus, et ensemble de relations sur ce domaine

Un example de situation relationnelle: les Beatles, *Abbey Road*



Décrire l'image

- Nous avons besoin aussi de symboles non-logiques pour décrire l'image
  - Soit le prédicat unaire "marche", qu'on symbolise par P
  - Soit la relation binaire "suivre", qu'on symbolisera par S.
  - Représentons les noms propres par: g, r, j, p

Décrire une structure d'interprétation

Nous associons à l'image une structure d'interprétation M:

- Nous avons besoin d'un domaine d'interprétation $D_M = \{George, Ringo, John, Paul\}$

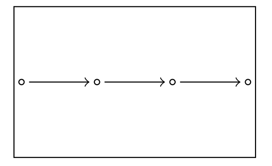
Décrire une structure d'interprétation

Nous associons à l'image une structure d'interprétation M:

- Nous avons besoin d'un domaine d'interprétation $D_M = \{George, Ringo, John, Paul\}$
- Puis d'interpréter les symboles non-logiques:
  - $I_M(g)$=George, $I_M(r)$ =Ringo, $I_M(j)$ =John, $I_M(p)$=Paul
  - $I_M(P) = \{$George, Ringo, John, Paul$\}$
  - $I_M(S) = \{$(George, Paul), (Paul, Ringo), (Ringo, John)$\}$

Diagramme





(7) a. Ringo marche
b. Pr

(8) a. Ringo suit John
b. Srj

(9) a. John suit Ringo
b. Sjr

(10) a. Tout le monde marche
b. $\forall x Px$

(11) a. Chacun suit quelqu'un
b. $\forall x \exists y Sxy$

(12) a. Quelqu'un ne suit personne.
b. $\exists x \forall y \neg Sxy$

Niveaux de représentation

Il faut distinguer plusieurs niveaux de représentation ici:

- Situation physique
- Photographie
- Structure relationnelle ensembliste
- Diagramme schématique
- Description en langue naturelle
- Description en logique des prédicats

On peut imaginer d'enrichir le langage pour décrire plus de choses:

(13) Paul tient une cigarette.

(14) Seul Paul tient une cigarette.

Ce genre de structure peut servir pour montrer l'invalidité de certains arguments:

(15) a. Quelqu'un suit quelqu'un.
b. Tout le monde suit quelqu'un.

Qu'est-ce qu'une relation?

Un prédicat relationnel est un prédicat n-aire (avec $n \geq 2$).

Comment interpréterons nous une relation ?

• Pour un prédicat unaire, nous interpréterons le prédicat par son extension = l'ensemble des objets auxquels le prédicat s'applique, pour lesquels le prédicat (vu comme une fonction) rend la valeur Vrai.

• Une relation sera interprétée comme un ensemble de n-uplets: l'ensemble des n-uplets à quoi s'applique la relation.

Relations binaires

(16) Soit le verbe transitif “aimer” et supposons qu’on ait trois individus a, b, c. Supposons que a aime b, b aime c, a s’aime lui-même, mais a n’aime pas c, etc. Comment représenter la relation binaire “aimer” relativement à ce domaine d’individus ?

(17) $R := \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$.

On a bien: $(a, b) \in R$, mais $(a, c) \notin R$

Definition

Etant donné un ensemble D, on appelle produit cartésien D^n l'ensemble $D \times D \times ... \times D$ (n fois), de tous les n-uplets $(d_1, ..., d_n)$ d'éléments de D.

(18) Si $D = \{a, b, c\}$, que vaut $D \times D$?

Definition

Etant donné un ensemble D, on appelle produit cartésien D^n l'ensemble $D \times D \times ... \times D$ (n fois), de tous les n-uplets $(d_1, ..., d_n)$ d'éléments de D.

(18) Si $D = \{a, b, c\}$, que vaut $D \times D$?

$D \times D =$
$\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$

Relation converse

Definition

Etant donnée une relation R, on appelle relation converse de R la relation R' telle que $(a, b) \in R$ ssi $(b, a) \in R'$.

(19) La converse R' de R est $\{(a, a), (b, a), (c, b)\}$.

Intuitivement, si R veut dire “aimer”, alors R' veut dire “être aimé de”. L’ordre des éléments n’est pas le même.

III. Sémantique des prédicats relationnels

Structures d'interprétation

L'interprétation d'une formule de la logique des prédicats est toujours relative à:

1. Un **univers d'interprétation** ou domaine de quantification D (ensemble non-vide d'individus)
2. Une **fonction d'interprétation** I qui nous dit comment interpréter les constantes d'individus et les symboles de prédicats

On appelle un couple $M = (D_M, I_M)$ une structure d'interprétation. Cela nous sert à définir ce que nous appellerons une valuation I_M basée sur M

Hypothèses simplificatrices

i) tout individu du domaine a un **nom canonique**, le même dans le langage-objet que celui du métalangage: si d est un individu du domaine, on écrit d son nom. Etant donné une fonction d'interprétation I_M, nous supposerons que $I_M(d) = d$.

ii) Nous ne nous soucions pas de l'interprétation les variables séparément. Nous supposons que nous interprétons uniquement des **formules closes** dans un premier temps (il n'y pas de variables libres dans nos formules)

Symboles de fonction

Outre les constantes d'individus, on peut aussi introduire dans le langage des symboles de fonction, qui créent un terme à partir d'un terme.

(20) Marie: m

(21) Le frère de Marie: fm.

(22) Le successeur de x: sx, ou encore $x + 1$

Les symboles fonctionnels ont une arité: si $t_1, ..., t_n$ sont des termes singuliers, et f un symbole fonctionnel n-aire, alors $ft_1...t_n$ est un terme.

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

- si a est une constante d'individu: $I_M(a) \in D_M$

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

- si a est une constante d'individu: $I_M(a) \in D_M$
- si f est un symbole de fonction n-aire, alors $I_M(f) \in D_M^{D_M^n}$

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

- si a est une constante d'individu: $I_M(a) \in D_M$
- si f est un symbole de fonction n-aire, alors $I_M(f) \in D_M^{D_M^n}$
- si P est un symbole de prédicat unaire: $I_M(P) \subseteq D_M$

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

- si a est une constante d'individu: $I_M(a) \in D_M$
- si f est un symbole de fonction n-aire, alors $I_M(f) \in D_M^{D_M^n}$
- si P est un symbole de prédicat unaire: $I_M(P) \subseteq D_M$
- si R est un symbole de prédicat n-aire, alors $I_M(R) \subseteq (D_M)^n$ (le produit cartésien de D_M, n fois)

Interprétation des constantes et symboles de prédicat

Etant donné une structure $M = (D_M, I_M)$, la fonction I_M associe à chaque constante d'individu un élément du domaine, et à chaque prédicat unaire un sous-ensemble du domaine:

- si a est une constante d'individu: $I_M(a) \in D_M$
- si f est un symbole de fonction n-aire, alors $I_M(f) \in D_M^{D_M^n}$
- si P est un symbole de prédicat unaire: $I_M(P) \subseteq D_M$
- si R est un symbole de prédicat n-aire, alors $I_M(R) \subseteq (D_M)^n$ (le produit cartésien de D_M, n fois)

• Nous notons: $F[c/x]$ la formule F dans laquelle on remplace chaque occurrence libre de x par c

Règles d'interprétation

1. Formules atomiques: $I_M(Pa) = 1$ ssi $I_M(a) \in I_M(P)$

   $I_M(Ra_1...a_n) = 1$ ssi $(I_M(a_1), ..., I_M(a_n)) \in I_M(R)$

2. Négation: $I_M(\neg F) = 1$ ssi $I_M(F) = 0$

3. Connecteurs binaires:
   Conjonction: $I_M(F \wedge G) = 1$ ssi $min(I_M(F), I_M(G)) = 1$
   Disjonction: $I_M(F \vee G) = 1$ ssi $max(I_M(F), I_M(G)) = 1$
   Conditionnel: $I_M(F \to G) = 1$ ssi $I_M(F) \leq I_M(G)$

4. Quantificateurs:
   $I_M(\forall xF) = 1$ ssi pour tout individu d de D_M, on a:
   $I_M(F[d/x]) = 1$
   $I_M(\exists xF) = 1$ ssi il y a un individu d dans D_M tel que:
   $I_M(F[d/x]) = 1$

Remarques

Vous remarquez que:

- la fonction d'interprétation I_M sert à interpréter les symboles extra-logiques (constantes, fonctions, prédicats), et nous l'étendons ensuite pour interpréter les formules closes.
- les symboles logiques sont interprétés par les règles usuelles pour les connecteurs propositionnels, ajustées pour les quantificateurs

Nous ne nous soucions pas d'interpréter à part les variables ici, puisque nous n'avons que des formules closes.

Exemple

Pierre aime Marie, et elle seule.
Marie n'aime personne, sauf elle-même.
Jacques aime tout le monde.

Construire une structure à 3 éléments dans laquelle les formules suivantes sont vraies: $\forall x Ajx, Apm, Amm$. La représenter par un diagramme.

Exemple

Pierre aime Marie, et elle seule.
Marie n'aime personne, sauf elle-même.
Jacques aime tout le monde.

Construire une structure à 3 éléments dans laquelle les formules suivantes sont vraies: $\forall x Ajx, Apm, Amm$. La représenter par un diagramme.

Soit M telle que $D_M = \{j, p, m\}$
$I_M(A) = \{(j, j), (j, m), (j, p), (m, m), (p, m)\}$
$I_M(j) = j$, $I_M(p) = p$, $I_M(m) = m$.

IV. Validité

Conséquence logique

• On dit qu'une formule F a pour **conséquence logique** une formule G ssi pour toute structure d'interprétation M, pour toute interprétation I_M basée sur M, si $I_M(F) = 1$ alors $I_M(G) = 1$.

• On dit que F et G sont **logiquement contradictoires** ssi pour toute structure M et toute interprétation I_M associée: $I_M(F) = 1$ ssi $I_M(G) = 0$

• Deux formules F et G sont **logiquement équivalentes** ssi elles sont les mêmes valeur de vérité dans toute interprétation I_M. On note $F \equiv G$

Equivalences remarquables

(23) $\exists x(Ax \vee Bx) \equiv \exists Ax \vee \exists xBx$

(24) $\forall x(Ax \wedge Bx) \equiv \forall xAx \wedge \forall xBx$

Ces équivalences justifient parfois de dire que le quantificateur universel est une conjonction généralisée, l'existentiel une disjonction généralisée.

Conséquences remarquables

(25) $\forall x Ax \vee \forall x Bx \models \forall x(Ax \vee Bx)$

(26) $\exists x(Ax \wedge Bx) \models \exists x Ax \wedge \exists x Bx$

mais:

(27) $\forall x(Ax \vee Bx) \not\models \forall x Ax \vee \forall x Bx$

(28) $\exists x Ax \wedge \exists x Bx \not\models \exists x(Ax \wedge Bx)$

Soit la structure $M = (D_M, I_M)$ telle que: $D_M = \{a, b\}$, avec $I_M(A) = \{a\}$ et $I_M(B) = \{b\}$.

Soit la structure $M = (D_M, I_M)$ telle que: $D_M = \{a, b\}$, avec $I_M(A) = \{a\}$ et $I_M(B) = \{b\}$.

On a $a \in I_M(A)$, donc $I_M(Aa) = 1$
idem $b \in I_M(B)$, donc $I_M(Bb) = 1$,
et donc $I_M(\exists x Ax) = 1$ et $I_M(\exists x Bx) = 1$.

Soit la structure $M = (D_M, I_M)$ telle que: $D_M = \{a, b\}$, avec $I_M(A) = \{a\}$ et $I_M(B) = \{b\}$.

On a $a \in I_M(A)$, donc $I_M(Aa) = 1$
idem $b \in I_M(B)$, donc $I_M(Bb) = 1$,
et donc $I_M(\exists x Ax) = 1$ et $I_M(\exists x Bx) = 1$.

En revanche, $I_M(\exists x(Ax \wedge Bx)) = 0$, car $I_M(Aa \wedge Ba) = 0$ et $I_M(Ab \wedge Bb) = 0$.

Tiers-Exclu, Dualité

(29) $\models \forall x(Ax \vee \neg Ax)$ (loi du tiers-exclu quantifié)

(30) $\exists x\phi \equiv \neg\forall\neg\phi$ (dualité de $\exists$ et $\forall$)

V. Variables libres et liées

Variables libres, variables liées

Considérez les deux formules suivantes:

(31) a. $\exists x(Px \vee Qx)$
b. $(\exists x Px \vee Qx)$

On dit que toutes les occurrences de la variable x (autre que celle qui suit le quantificateur) sont liées par $\exists x$ dans la première formule, mais que dans la seconde seule la première occurrence est liée par $\exists x$.



Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \rightarrow \exists x Qx)$.

Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \to \exists x Qx)$.
x est libre dans Px et liée dans Qx.

Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \rightarrow \exists x Qx)$.
x est libre dans Px et liée dans Qx.

b. $\exists x(Px \wedge Qy)$

Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \rightarrow \exists x Qx)$.
x est libre dans Px et liée dans Qx.

b. $\exists x(Px \wedge Qy)$
x est liée Px et y est libre dans Qy.

Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \to \exists x Qx)$.
x est libre dans Px et liée dans Qx.

b. $\exists x(Px \wedge Qy)$
x est liée Px et y est libre dans Qy.

c. $\exists x \forall y(Px \to Qy)$

Considérer les formule suivantes. Dans chaque formule, indiquer les variables libres et les variables liées:

a. $(Px \rightarrow \exists x Qx)$.
x est libre dans Px et liée dans Qx.

b. $\exists x(Px \wedge Qy)$
x est liée Px et y est libre dans Qy.

c. $\exists x \forall y(Px \rightarrow Qy)$
x est liée dans Px et y liée dans Qy.

Portée d'un quantificateur

On appelle **portée** d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ la plus grande formule qui suit ce quantificateur. Quelle est la portée de $\exists x$ dans F, et dans G?

$F := \exists x(P\underline{x} \vee Q\underline{x})$
$G := (\exists x P\underline{x} \vee Q\underline{x})$

Portée d'un quantificateur

On appelle **portée** d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$ la plus grande formule qui suit ce quantificateur. Quelle est la portée de $\exists x$ dans F, et dans G?

$F := \exists x(P\underline{x} \vee Q\underline{x})$
$G := (\exists x P\underline{x} \vee Q\underline{x})$

Portée de $\exists x$ dans F: $(Px \vee Qx)$
Portée de $\exists x$ dans G: Px.

Renommage des variables liées

Théorème

Dans une formule donnée, on peut renommer les variables liées par de nouvelles variables n'apparaissant pas dans la formule de départ.

Les formules qui ne diffèrent que par le nommage des variables liées sont logiquement équivalentes:

(32) $\forall x Rxx$ et $\forall y Ryy$

(33) $\forall x \exists z (Rxz)$ et $\forall y \exists z Ryz$

Renommage des variables liées

Théorème

Dans une formule donnée, on peut renommer les variables liées par de nouvelles variables n'apparaissant pas dans la formule de départ.

Les formules qui ne diffèrent que par le nommage des variables liées sont logiquement équivalentes:

(32) $\forall x Rxx$ et $\forall y Ryy$

(33) $\forall x \exists z (Rxz)$ et $\forall y \exists z Ryz$

En renommant les variables, il faut éviter des captures de variables libres:

(34) $\forall y Rxy$ ne peut pas se réécrire en $\forall x Rxx$

Identité et existence en logique des prédicats

Paul Égré

I. L’identité

L'identité

La logique des prédicats permet de traiter la notion d'identité à l'aide du symbole d'égalité $=$. Il s'agit d'un symbole de prédicat binaire distingué. L'identité est une relation qui est réflexive, symétrique et transitive, donc qui satisfait les principes suivants:

(1) $\forall x(x = x)$

(2) $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

(3) $\forall x \forall y \forall z(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$

Relations d'équivalence

Pour être sûr que nous parlons bien de la relation d'identité, il faut fixer l'interprétation de cette relation, de sorte que, pour une structure d'interprétation $M = (D_M, I_M)$, nous ayons: $I_M(=) = \{(d, d); d \in D\}$.

Autrement dit, on interprète l'identité comme une relation qui relie chaque élément à lui-même, et à aucun autre.

L'identité est une relation d'équivalence, mais c'est une condition nécessaire et non suffisante.

Au moins un, au moins deux, ...

L'ajout du symbole d'identité permet d'exprimer certains énoncés de cardinalité en logique:

(4) a. Il y a au moins un carré.
    b. $\exists x Cx$

Au moins un, au moins deux, ...

L'ajout du symbole d'identité permet d'exprimer certains énoncés de cardinalité en logique:

(4) a. Il y a au moins un carré.
 b. $\exists x Cx$

(5) a. Il y a au moins deux carrés.
 b. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Cx \wedge Cy)$

Au moins un, au moins deux, ...

L'ajout du symbole d'identité permet d'exprimer certains énoncés de cardinalité en logique:

(4) a. Il y a au moins un carré.
    b. $\exists x Cx$

(5) a. Il y a au moins deux carrés.
    b. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge Cx \wedge Cy)$

(6) a. Il y a au moins trois carrés.
    b. $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$

Au plus un, au plus deux,...

(7) a. Il a au plus un carré.
   b. $\forall x \forall y (Cx \wedge Cy \rightarrow x = y)$

(8) a. Il y a au plus deux carrés.
   b. $\forall x \forall y \forall z (Cx \wedge Cy \wedge Cz \rightarrow x = y \vee x = z \vee y = z)$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- ...

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x \neg\exists y \exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x \neg\exists y \exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- ...
- $\forall x \forall y \forall z \neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- ...
- $\forall x\forall y\forall z\neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\forall y\forall z(\neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z) \vee \neg(Cx \wedge Cy \wedge Cz))$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x \neg\exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x \neg\exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- ...
- $\forall x \forall y \forall z \neg (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x \forall y \forall z (\neg (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z) \vee \neg (Cx \wedge Cy \wedge Cz))$
- $\forall x \forall y \forall z (\neg (Cx \wedge Cy \wedge Cz) \vee \neg (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z))$

- Ce n'est pas vrai qu'il y a au moins trois carrés.
- $\neg\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\neg\neg\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\neg\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- ...
- $\forall x\forall y\forall z\neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z \wedge Cx \wedge Cy \wedge Cz)$
- $\forall x\forall y\forall z(\neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z) \vee \neg(Cx \wedge Cy \wedge Cz))$
- $\forall x\forall y\forall z(\neg(Cx \wedge Cy \wedge Cz) \vee \neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z))$
- $\forall x\forall y\forall z((Cx \wedge Cy \wedge Cz) \rightarrow \neg(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z))$
- $\forall x\forall y\forall z((Cx \wedge Cy \wedge Cz)\rightarrow(x = y \vee y = z \vee x = z))$

Exactement un

(9) Il y a exactement un étudiant.

(10) $\exists x Ex \wedge \forall x \forall y (Ex \wedge Ey \rightarrow x = y)$

(11) $\exists x (Ex \wedge \forall y (Ey \rightarrow y = x)$

II. L’existence

Deux inférences

(12) a. Paul McCartney est un chanteur.
b. Il existe un chanteur.

Deux inférences

(12) a. Paul McCartney est un chanteur.
b. Il existe un chanteur.

(13) a. La planète Vulcain n'existe pas.
b. ??Il existe une planète qui n'existe pas.

Deux inférences

(12) a. Paul McCartney est un chanteur.
b. Il existe un chanteur.

(13) a. La planète Vulcain n’existe pas.
b. ??Il existe une planète qui n’existe pas.

Rappel: Vulcain, planète hypothétique dont l’existence est postulée par Le Verrier en 1860 pour expliquer les anomalies du périhélie de Mercure. Son existence n’est pas attestée, et considérée comme réfutée par la théorie de la relativité générale d’Einstein (1916).

L'existence comme prédicat ?

(14) a. La planète Vulcain n'existe pas.
b. $\exists x(x = a \wedge \neg Ex)$

On peut traiter l'existence comme un prédicat, distinct de la contribution du quantificateur existentiel. Meinong distingue ainsi existence et subsistance.

En faveur du meinongianisme

La position de Meinong est souvent considérée comme suspecte (notamment par Russell 1905), mais on peut donner des arguments en sa faveur :

(15)
a. Pégase est un cheval ailé.
b. Pégase n'existe pas.
c. Donc, certains chevaux n'existent pas (à savoir les chevaux ailés).
d. Donc, certaines choses n'existent pas.

Contre le meinongianisme

Russell: si l'on admet que l'existence est une propriété distincte de l'être, alors on doit concevoir deux types d'entités pour chaque chose: la chose existante, la même chose non-existante.

Termes singuliers sans présupposition d'existence

- La sémantique standard suppose que tous les termes singuliers dénotent des individus du domaine.
- Mais on pourrait imaginer que certains termes singuliers ne soient pas référentiels.
- Dans ce cas, si "*a*" désigne Vulcain, on pourrait écrire qu'il n'y a aucun objet du domaine identique à Vulcain

(16) $\neg\exists x(x = a)$

Logique libre

Cette solution est adoptée en *logique libre* (pour libre des présuppositions d'existence). Au lieu de l'inférence:

(17) $Pa \models \exists xPx$

Il faut une prémisse explicite sur l'existence, à savoir:

(18) $Pa, \exists x(x = a) \models \exists xPx$

Cette solution demande de modifier la sémantique standard: nous devons alors admettre que les termes singuliers ne désignent pas nécessairement.

Les noms propres comme prédicats

- La solution préconisée par Russell, et popularisée notamment par Quine, consiste à traiter le nom propre "Vulcain" comme désignant une propriété descriptive complexe, "vulcaniser".

Les noms propres comme prédicats

- La solution préconisée par Russell, et popularisée notamment par Quine, consiste à traiter le nom propre “Vulcain” comme désignant une propriété descriptive complexe, “vulcaniser”.
- Dire que Vulcain n’existe pas, c’est dire qu’aucun objet ne “vulcanise”, autrement dit, n’a toutes les propriétés qui définissent implicitement ou explicitement la planète en question

(19) $\neg\exists x Vx$

Russell sur les descriptions définies

En 1905, dans “On Denoting”, Russell propose une théorie des termes singuliers (descriptions définies pour “le/la x tel que Px”) qui est justement avancée pour éviter de dissocier la quantification existentielle de la notion d’existence.

Russell sur les descriptions définies

En 1905, dans “On Denoting”, Russell propose une théorie des termes singuliers (descriptions définies pour “le/la x tel que Px”) qui est justement avancée pour éviter de dissocier la quantification existentielle de la notion d’existence.

(20) Un roi de France est chauve.

Russell sur les descriptions définies

En 1905, dans “On Denoting”, Russell propose une théorie des termes singuliers (descriptions définies pour “le/la x tel que Px”) qui est justement avancée pour éviter de dissocier la quantification existentielle de la notion d’existence.

(20) Un roi de France est chauve.

(21) Le roi de France est chauve.

L’analyse russellienne

(22) Le roi de France est chauve.

L’analyse russellienne

(22) Le roi de France est chauve.

a. Au moins un roi de France est chauve.

b. Au plus un roi de France est chauve.

(23) a. $\exists x Rx$ (existence)

L’analyse russellienne

(22) Le roi de France est chauve.

a. Au moins un roi de France est chauve.
b. Au plus un roi de France est chauve.

(23) a. $\exists x R x$ (existence)
b. $\forall x \forall y (Rx \wedge Ry \rightarrow x = y)$ (unicité)

L’analyse russellienne

(22) Le roi de France est chauve.

a. Au moins un roi de France est chauve.
b. Au plus un roi de France est chauve.

(23)
a. $\exists x Rx$ (existence)
b. $\forall x \forall y (Rx \wedge Ry \rightarrow x = y)$ (unicité)
c. $\forall x (Rx \rightarrow Cx)$ (prédication)

L'analyse russellienne

(22) Le roi de France est chauve.

a. Au moins un roi de France est chauve.
b. Au plus un roi de France est chauve.

(23)
a. $\exists x Rx$ (existence)
b. $\forall x \forall y (Rx \land Ry \rightarrow x = y)$ (unicité)
c. $\forall x (Rx \rightarrow Cx)$ (prédication)

(24) $\exists x (Rx \land \forall y (Ry \rightarrow x = y) \land Cx)$ [synthèse]

Nier l'existence

Cas d'une description indéfinie:

(25) a. Il n'existe aucun roi de France.
b. $\neg\exists x Rx$

Nier l'existence

Cas d'une description indéfinie:

(25) a. Il n'existe aucun roi de France.
b. $\neg\exists xRx$

Cas d'une description définie:

(26) a. La planète située entre Mercure et le Soleil n'existe pas.
b. $\neg\exists x(Mx \wedge \forall y(My \rightarrow y = x))$

L'existence est-elle un prédicat?

• Kant: pourquoi l'existence n'est pas un prédicat (Kant, CRP, II, 3 (4)). Kant propose une critique de l'argument ontologique d'Anselme:

(27)
a. Dieu est parfait.
b. L'existence est une perfection.
c. Dieu existe.

Kant sur l'existence

- Kant n'a pas sous la main le calcul des prédicats. Mais son idée est que "Dieu" pourrait être un concept vide, il ne suffit pas de poser un concept pour en poser l'existence
- "*poser un triangle en en supprimant les trois angles est contradictoire; mais faire disparaître à la fois le triangle et les trois angles, il n'y a plus là de contradiction*".

(28) $\exists x(Tx \wedge \neg Tx) \models \bot$

(29) $\models \neg\exists x(Tx \wedge \neg Tx)$

Frege sur l'existence

- Frege (1884, §53): l'existence est une propriété de second ordre et non de premier ordre.
- "Affirmer l'existence, ce n'est rien autre que nier le nombre zéro"

Frege sur l'existence

- Frege (1884, §53): l'existence est une propriété de second ordre et non de premier ordre.
- "Affirmer l'existence, ce n'est rien autre que nier le nombre zéro"

(30) a. Il y a peu de bons restaurants.
b. *Ce bon restaurant est peu.

Frege distingue:

- Concept: "Triangle rectangle"
- Caractères du concept: 'triangle' et 'rectangle'
- Propriétés du concept: l'existence

Un exemple de Frege

- Soit le concept: “être un concept ne subsumant qu’un seul objet”.
- Cette fois, ce concept lui-même a l’unicité parmi ses caractères, mais pas comme propriété
- il subsume les concepts “satellite naturel de la Terre”, “étoile autour de laquelle gravite la Terre”, “actuel Président la République”, etc.

Etre vs Existence

Certains (viz. van Inwagen 2011, 2014) proposent de traiter la notion d'être via la notion d'identité: être, dans cette conception, c'est être identique à quelque chose.

(31) a. Toute chose est.
b. $\forall x \exists y (x = y)$

(32) a. Tout carré rond est.
b. $\forall x (Cx \wedge Rx \rightarrow \exists y (x = y))$

(33) a. Mais il n'existe pas de carré rond.
b. $\neg \exists x (Cx \wedge Rx)$

Selon cette perspective, on peut réintroduire une différence entre être et exister. Tout ce dont on peut parler est, mais “exister” ne pourrait se dire que de ces concepts qui sont instanciés par au moins un objet.

Quantifier sur les propriétés ?

En logique des prédicats dits du premier ordre, les variables quantifient sur des individus du domaine, mais jamais sur des sous-ensembles ou des relations du domaine.

Mais on peut rendre encore plus expressive la logique en quantifiant sur des propriétés et relations de premier ordre.

Le principe d'identité de Leibniz

Principe d'identité de Leibniz: Deux objets sont identiques si et seulement s'ils satisfont toutes les mêmes propriétés.

(34) $a = b$ ssi par définition: $\forall P(Pa \leftrightarrow Pb)$

Remarquer que, dans cette formule, le quantificateur $\forall P$ lie une variable de propriété unaire.

Le principe d'identité de Leibniz

Principe d'identité de Leibniz: Deux objets sont identiques si et seulement s'ils satisfont toutes les mêmes propriétés.

(34) $a = b$ ssi par définition: $\forall P(Pa \leftrightarrow Pb)$

Remarquer que, dans cette formule, le quantificateur $\forall P$ lie une variable de propriété unaire.

La logique du second ordre

La logique du second ordre est plus expressive que la logique du premier ordre, mais encore plus complexe:

(35) a. Il y a trois chats et deux chiens
b. Il y a plus de chats que de chiens

(35)-b n'est pas exprimable en logique des prédicats de premier ordre avec identité. L'énoncé exprime qu'un ensemble contient plus d'éléments qu'un autre, mais sans préciser le nombre des éléments.

Éléments de logique inductive

Paul Égré

I. Inférences probabilistes

Inférence contrefactuelle

(1) a. Si un étranger avait commis le crime, le chien aurait aboyé.
b. Le chien n’a pas aboyé.
c. Le crime n’a pas été commis par un étranger.

L’inférence ressemble à une application du modus tollens.

L’inférence ressemble à une application du modus tollens.

Mais on peut aussi interpréter l’inférence comme exprimant une relation de connexion probabiliste entre antécédent et conséquent :

L'inférence ressemble à une application du modus tollens.

Mais on peut aussi interpréter l'inférence comme exprimant une relation de connexion probabiliste entre antécédent et conséquent :

"*Si un étranger avait commis le crime, le chien aurait aboyé*".

- $Pr(Aboiement|Etranger) = 0.8$
- $Pr(Aboiement|non - Etranger) = 0.1$

L'inférence ressemble à une application du modus tollens.

Mais on peut aussi interpréter l'inférence comme exprimant une relation de connexion probabiliste entre antécédent et conséquent :

"*Si un étranger avait commis le crime, le chien aurait aboyé*".

- $Pr(Aboiement|Etranger) = 0.8$
- $Pr(Aboiement|non - Etranger) = 0.1$

$Pr(Etranger|Pas\ d'Aboiement) = ?$

La plupart

(2) a. La plupart des linguistes sont polyglottes.
b. Marie est polyglotte.
c. Marie est linguiste.

(3) a. La plupart des casseurs sont d'extrême-centre.
b. Pierre est d'extrême-centre.
c. Pierre est un casseur.

Cette inférence avec “la plupart” n’est pas formalisable en logique des prédicats à proprement parler. En revanche on peut lui donner une formulation probabiliste :

$Pr(Polyglotte|Linguiste) > 1/2$
$Pr(Polyglotte(Marie)) = 1$
$Pr(Linguiste(Marie)) = ?$

Implicature scalaire

(4) a. Quelques linguistes sont venus.
    b. Quelques linguistes ne sont pas venus.

L'inférence n'est pas valide en logique des prédicats. En revanche on peut l'expliquer par des mécanismes probabilistes.

(5) a. Si le locuteur avait su que "tous les linguistes sont venus", il l'aurait dit.
    b. Le locuteur n'a pas dit "tous les linguistes sont venus"
    c. Le locuteur pense que "tous les linguistes sont venus" est faux.

$Pr(\text{"tous"} \mid \text{locuteur sait que tous}) = 0.8$
$Pr(\text{pas tous} \mid \text{"quelques"}) = ?$

On se donne un langage propositionnel où les propositions élémentaires sont représentées par les lettres $p, q, r, \ldots$ (nous utiliserons des lettres majuscules parfois quand c'est plus commode ou naturel, cela ne posera pas de difficulté).

Ces propositions représentent des événements atomiques, mais on peut représenter des événements plus complexes (booléens), par des formules de logique propositionnelle.

II. Probabilité conditionnelle

A toute proposition, on associera une mesure de probabilité par la fonction *Pr* à valeurs réelles :

1. Pour toute proposition A, $0 \leq Pr(A) \leq 1$.
2. Si A et B sont des propositions qui s'excluent mutuellement, $Pr(A \vee B) = Pr(A) + Pr(B)$
3. Une proposition certaine est telle que $Pr(A) = 1$
4. Deux propositions logiquement équivalentes ont la même probabilité.

Propriétés remarquables

Théorème
$Pr(A \vee B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \wedge B)$

Théorème
Si A implique logiquement B, alors $Pr(A) \leq Pr(B)$

Théorème
$Pr(A) = Pr(A \wedge B) + Pr(A \wedge \neg B)$

Théorème
$Pr(\neg A) = 1 - Pr(A)$

Probabilité conditionnelle

On définit une notion de probabilité conditionnelle d'une proposition relativement à une autre comme suit, lorsque $Pr(B) > 0$:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \wedge B)}{Pr(B)}$$

Exemple

On lance un dé à 6 faces équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4 si le dé tombe sur une face paire ?

Exemple

On lance un dé à 6 faces équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4 si le dé tombe sur une face paire ?

1	2	3
4	5	6

~~1~~	2	~~3~~
4	~~5~~	6

Exemple

On lance un dé à 6 faces équiprobables. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4 si le dé tombe sur une face paire ?

1	2	3
4	5	6

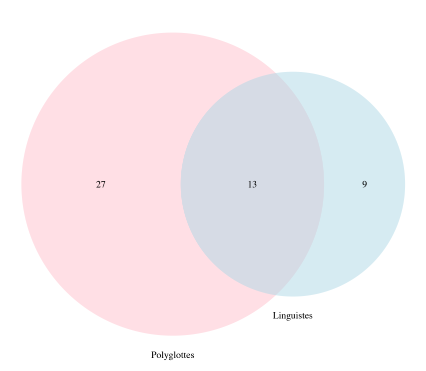
~~1~~	2	~~3~~
4	~~5~~	6

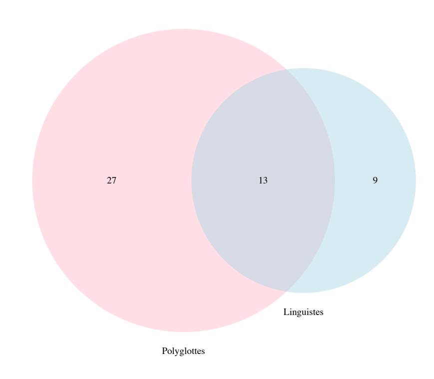
On recherche $Pr(4|Pair) = \frac{Pr(4 \wedge Pair)}{Pr(Pair)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

Diagrammes de Venn

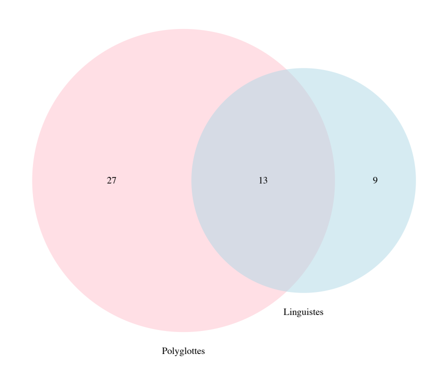
Un diagramme de Venn sert à représenter l'information concernant les rapports d'inclusion, de chevauchement, et éventuellement aussi les proportions relatives entre divers ensembles.

• Supposons qu'il y a 49 personnes en tout dans l'univers d'interprétation, donc 40 polyglottes, 22 linguistes dont 13 sont polyglottes.

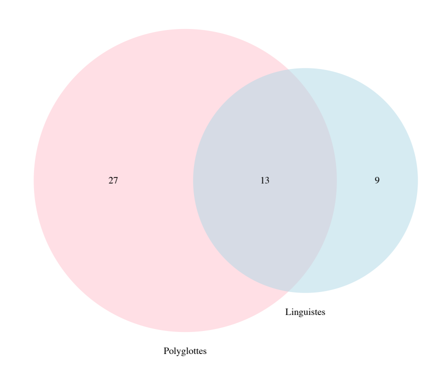




- Quelle est la probabilité d'être linguiste ? $Pr(L) = 22/49$
- Quell est la probabilité d'être polyglotte ? $Pr(P) = 40/49$



- Quelle est la probabilité d'être linguiste ? $Pr(L) = 22/49$
- Quell est la probabilité d'être polyglotte ? $Pr(P) = 40/49$
- Quelle est la probabilité d'être polyglotte si on est linguiste ? $Pr(P|L) = 13/22$



- Quelle est la probabilité d'être linguiste ? $Pr(L) = 22/49$
- Quell est la probabilité d'être polyglotte ? $Pr(P) = 40/49$
- Quelle est la probabilité d'être polyglotte si on est linguiste ? $Pr(P|L) = 13/22$
- Quelle est la probabilité d'être linguiste si on est polyglotte ? $Pr(L|P) = 13/40$

De l'importance de distinguer $P(A|B)$ et $P(A)$

En 1999, Sally Clark et son mari viennent de perdre, à quelques années d'intervalle, deux enfants de mort subite du nourrisson (MSN).

De l'importance de distinguer $P(A|B)$ et $P(A)$

En 1999, Sally Clark et son mari viennent de perdre, à quelques années d'intervalle, deux enfants de mort subite du nourrisson (MSN).

Un pédiatre de renom calcule que la fréquence des MSN dans la population est d'environ 1/8500. Il calcule que la fréquence d'en perdre deux fois est donc $(\frac{1}{8500})^2 = \frac{1}{72225000}$.

Il asserte donc : la probabilité que Sally Clark soit innocente est de 1 chance sur 73 millions (donc très proche de zéro).

Sally Clark passe 3 années en prison, et est libérée après un procès en révision. Elle même sombre dans une grave dépression et meurt en 2007.

La Royal Statistical Society - est. 1834

La RSS publie en 2001 un communiqué qui dit clairement :

> *”Society does not tolerate doctors making serious clinical errors because it is widely understood that such errors could mean the difference between life and death. The case of R v. Sally Clark is one example of a medical expert witness making a serious statistical error, one which may have had a profound effect on the outcome of the case.”*

Quelle est l'erreur ?

Comme le montre le RSS, il y en a plusieurs :

- Même en supposant les données exactes, on confond la probabilité que Sally Clark soit innocente sachant qu'elle a perdu 2 enfants de MSN avec la probabilité de perdre 2 enfants de MSN (qu'on soit innocent ou pas). Autrement dit : $P(2MSN)$ vs $P(I|2MSN)$
- Surtout les deux événements ne sont pas indépendants ! On ne peut poser $P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$ en général.
- Enfin, si on veut calculer la probabilité que Sally Clark soit innocente sachant qu'elle a perdu deux enfants de MSN, il faut la comparer avec une hypothèse alternative, et pour cela il faut utiliser la Règle de Bayes.

Le sophisme du procureur

Aside from its invalidity, figures such as the 1 in 73 million are very easily misinterpreted. Some press reports at the time stated that this was the chance that the deaths of Sally Clark's two children were accidental. This (mis-)interpretation is a serious error of logic known as the Prosecutor's Fallacy.

Le sophisme du procureur

Aside from its invalidity, figures such as the 1 in 73 million are very easily misinterpreted. Some press reports at the time stated that this was the chance that the deaths of Sally Clark's two children were accidental. This (mis-)interpretation is a serious error of logic known as the Prosecutor's Fallacy.The jury needs to weigh up two competing explanations for the babies' deaths : SIDS or murder. Two deaths by SIDS or two murders are each quite unlikely, but one has apparently happened in this case. What matters is the relative likelihood of the deaths under each explanation, not just how unlikely they are under one explanation (in this case SIDS, according to the evidence as presented).

L'affaire Dreyfus et le rapport Bertillon

Le rapport Darboux, Appell, Poincaré

Dans son mémoire présenté à la Cour de Cassation en 1899 il avait employé un raisonnement entièrement fautif qu'il a répété ensuite devant le Conseil de Guerre de Renne. Ayant constaté quatre coïncidences sur les 26 initiales et finales des polysyllabes redoublés, il se demande quelle conclusion on peut en tirer. Il évalue à 0.2, la probabilité d'une coïncidence isolée et il en conclut que la probabilité de 4 coïncidences est (0.2)4 = 0.0016. Mais l'examen le plus superficiel montre que c'est là la probabilité pour qu'il y ait 4 coïncidences sur 4 : celle de 4 coïncidences sur 26 est de 0.7, c'est à dire 400 fois plus grande. Quand cette erreur a été signalée, on a répondu qu'il y avait en réalité plus de 4 coïncidences et que la probabilité de chacune d'elles était plus petite que 0.2 ; la raisonnement n'en demeure pas moins faux, puisqu'il conduit l'auteur à un résultat 400 fois plus faible que celui que donnerait un calcul correct fait avec les même données.

III. Règle de Bayes

La règle de Bayes permet de calculer la probabilité en faveur d'une hypothèse (H) quand on dispose d'une certaine évidence=observation (E), et qu'on a fixé la probabilité a priori de l'évidence étant donné l'hypothèse ($Pr(E|H)$). On l'obtient à partir de la définition de la probabilité conditionnelle, à condition que $Pr(E) > 0$, et $Pr(H) > 0$:

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

Preuve de la règle

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(E)}$$

Preuve de la règle

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(E)}$$

Par ailleurs :

$$Pr(E|H) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(H)}$$

Preuve de la règle

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(E)}$$

Par ailleurs :

$$Pr(E|H) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(H)}$$

donc :

$$Pr(H \wedge E) = Pr(E|H)Pr(H)$$

Preuve de la règle

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(E)}$$

Par ailleurs :

$$Pr(E|H) = \frac{Pr(H \wedge E)}{Pr(H)}$$

donc :

$$Pr(H \wedge E) = Pr(E|H)Pr(H)$$

donc :

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

Vraisemblance, Prior, Posterior

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

On appelle :

$Pr(H)$: la probabilité a priori de l'hypothèse

Vraisemblance, Prior, Posterior

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

On appelle :

$Pr(H)$: la probabilité a priori de l'hypothèse
$Pr(E|H)$: la vraisemblance de l'évidence sachant l'hypothèse

Vraisemblance, Prior, Posterior

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

On appelle :

$Pr(H)$: la probabilité a priori de l'hypothèse
$Pr(E|H)$: la vraisemblance de l'évidence sachant l'hypothèse
$Pr(H|E)$: la probabilité a posteriori de l'hypothèse étant donné l'évidence

Vraisemblance, Prior, Posterior

$$Pr(H|E) = \frac{Pr(E|H)Pr(H)}{Pr(E)}$$

On appelle :

$Pr(H)$: la probabilité a priori de l'hypothèse
$Pr(E|H)$: la vraisemblance de l'évidence sachant l'hypothèse
$Pr(H|E)$: la probabilité a posteriori de l'hypothèse étant donné l'évidence
$Pr(E)$: probabilité a priori de l'évidence, ou probabilité marginale

Cas de plusieurs hypothèses

Soit un ensemble de n hypothèses H_1, ..., H_n, chacune de probabilité non-nulle, qui sont mutuellement exclusives et exhaustives.
On a :

$$Pr(H_k|E) = \frac{Pr(H_k)Pr(E|H_k)}{Pr(H_1)Pr(E|H_1) + ... + Pr(H_n)Pr(E|H_n)}$$

Exemple

Deux urnes A et B ont la composition suivante :

A : 80% des boules sont rouges, et 20% sont vertes
B : 40% sont rouges et 60% sont vertes.

On tire une boule au hasard parmi les deux urnes, sachant que la probabilité de tirer l'une ou l'autre urne est identique.

On observe une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne A ?

Notons R la probabilité d'obtenir une boule rouge, V celle d'obtenir une boule verte, et A et B les probabilités des deux urnes.
Nous avons :

- $Pr(A) = Pr(B) = 0.5$
- $Pr(R|A) = 0.8$
- $Pr(R|B) = 0.4$.

$$Pr(A|R) = \frac{Pr(R|A)Pr(A)}{Pr(R|A)Pr(A) + Pr(R|B)Pr(B)}$$
$$= \frac{0.5 \times 0.8}{0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4} = 2/3$$

Notons R la probabilité d'obtenir une boule rouge, V celle d'obtenir une boule verte, et A et B les probabilités des deux urnes.
Nous avons :

- $Pr(A) = Pr(B) = 0.5$
- $Pr(R|A) = 0.8$
- $Pr(R|B) = 0.4$.

$$Pr(A|R) = \frac{Pr(R|A)Pr(A)}{Pr(R|A)Pr(A) + Pr(R|B)Pr(B)}$$
$$= \frac{0.5 \times 0.8}{0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.4} = 2/3$$

Sur cet exemple, chaque urne joue le rôle d'une hypothèse, et rechercher de quelle urne provient la boule revient à chercher quelle probabilité a posteriori est conférée à l'hypothèse par l'évidence.

Une distinction importante

$Pr(A|B)$ est bien une fonction de probabilité. Donc en particulier,

$$Pr(\neg A|B) = 1 - Pr(A|B)$$

En revanche : $Pr(A|B)$ et $Pr(A|\neg B)$ ne sont pas des probabilités dans une relation simple !

Par exemple, la probabilité d'avoir un cancer si on fume, et celle d'avoir un cancer si on ne fume pas peuvent très bien ne pas égaler 1, ou dépasser 1, quand on les ajoute.

Soit une population de 100 personnes, dont 40 fument, parmi lesquelles il y a 10 cas de cancer, et 60 ne fument pas, parmi lesquels il y a 10 cas de cancer. On a : $Pr(C|F) = 1/4$ et $Pr(C|\neg F) = 1/6$.

IV. Retours aux inférences inductives

L'inférence de Holmes

On appellera ici H l'hypothèse que le coupable est un étranger.

$Pr(A|H) = 0.8$
$Pr(A|\neg H) = 0.1$

Donc :
$Pr(\neg A|H) = 0.2$
$Pr(\neg A|\neg H) = 0.9$

Par ailleurs, on peut supposer qu'il est indifférent quant à la vraisemblance de l'hypothèse E, ie $Pr(H) = 0.5$.

Holmes pense qu'il est possible que ce soit un étranger, mais qu'il est tout aussi possible que ce ne soit pas un étranger, a priori.

Inférence bayésienne de Holmes

On a donc :

$Pr(E|\neg A) = \frac{Pr(\neg A|E)Pr(E)}{Pr(\neg A|E)Pr(E)+Pr(\neg A|\neg E)Pr(\neg E)} = \frac{0.2\times 0.5}{0.2\times 0.5+0.9\times 0.5} = \frac{2}{11}$
Donc
$Pr(\neg E|\neg A) = 1 - Pr(E\neg A) = \frac{9}{11} = 0.818$

Holmes conclut, sous l'hypothèse que le chien n'a pas aboyé, qu'il est relativement probable que le crime n'a pas été commis par un étranger.

La plupart

- Supposons que : $Pr(P|L) = 0.7$, il y a 70% de polyglottes parmi les linguistes (professionnels).
- Marie est polyglotte
- on en conclut qu'elle est probablement linguiste.

Cette inférence repose sur des hypothèses implicites.

Cas 1 : (cas où l'on pense à la population totale, peu de linguistes)

- $Pr(P|L) = 0.7$
- $Pr(P|\neg L) = 0.4$
- $Pr(L) = 0.01$

$$Pr(L|P) = \frac{Pr(P|L)Pr(L)}{Pr(P|L)Pr(L)+Pr(P|\neg L)Pr(\neg L)} = \frac{0.7\times 0.01}{0.7\times 0.01+0.4\times 0.99} = 0.015$$

Dans ce cas, la probabilité s'accroît, mais très peu.

Cas 2 (cas où l'on pense à la population des chercheurs du LSCP, beaucoup de linguistes :

- $Pr(P|L) = 0.7$
- $Pr(P|\neg L) = 0.4$
- $Pr(L) = 0.5$

Alors $Pr(L|P) = \frac{0.7}{0.7+0.4} = \frac{7}{11} = 0.63$. Dans ce contexte, il peut être raisonnable de conclure que si Marie est polyglotte, alors elle est probablement linguiste.

Cette fois la probabilité postérieure s'accroît plus significativement (si le seuil pour la croyance était 0.5)

Sensibilité au contexte

L’exemple précédent montre que les inférences inductives sont sensibles au contexte.

Leur qualité ou force dépend de la vraisemblance des hypothèses, et aussi des probabilités a priori, et enfin du seuil retenu pour juger qu’une hypothèse est probable tout court.

V. Le problème de l’induction

Le test d'hypothèses

Voici un exemple tiré de M. Strevens *Notes on Bayesian Confirmation Theory* (disponible en ligne). Supposons qu'on ait trois hypothèses équiprobables sur les corbeaux :

H1 : tous les corbeaux sont noirs
H2 : aucun corbeau n'est noir
H3 : la moitié des corbeaux sont noirs

On observe 1 corbeau (E), on se demande laquelle de ces hypothèses est désormais la plus probable

Raisonnement bayésien

$Pr(E|H1) = 1$, $Pr(E|H2) = 0$, $Pr(E|H3) = 1/2$

Raisonnement bayésien

$Pr(E|H1) = 1$, $Pr(E|H2) = 0$, $Pr(E|H3) = 1/2$

$$Pr(Hi|E) = \frac{Pr(E|Hi)Pr(Hi)}{\sum Pr(E|Hj)Pr(Hj)}$$ (Formule de Bayes)

Raisonnement bayésien

$Pr(E|H1) = 1$, $Pr(E|H2) = 0$, $Pr(E|H3) = 1/2$

$$Pr(Hi|E) = \frac{Pr(E|Hi)Pr(Hi)}{\sum Pr(E|Hj)Pr(Hj)}$$ (Formule de Bayes)

Or :

$Pr(E|H1)Pr(H1) = 1/3$
$Pr(E|H2)Pr(H2) = 0$
$Pr(E|H3)Pr(H3) = 1/6$

Raisonnement bayésien

$$Pr(E|H1) = 1,\ Pr(E|H2) = 0,\ Pr(E|H3) = 1/2$$

$$Pr(Hi|E) = \frac{Pr(E|Hi)Pr(Hi)}{\sum Pr(E|Hj)Pr(Hj)} \text{ (Formule de Bayes)}$$

Or :

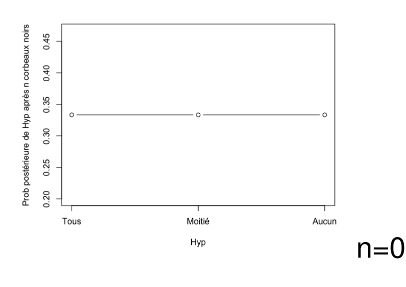
$Pr(E|H1)Pr(H1) = 1/3$
$Pr(E|H2)Pr(H2) = 0$
$Pr(E|H3)Pr(H3) = 1/6$

$$Pr(H1|E) = \frac{1/3}{1/3 + 1/6} = \frac{2}{3}$$
$$Pr(H2|E) = 0$$
$$Pr(H3|E) = \frac{1/6}{1/3 + 1/6} = \frac{1}{3}.$$

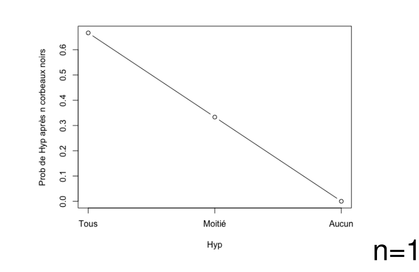
Ici l'observation d'un corbeau noir suffit à privilégier l'hypothèse que tous les corbeaux sont noirs.

• Notons que même si le prior en faveur de l'hypothèse que tous les corbeaux sont noirs est faible initialement, l'accumulation d'évidence peut suffire à faire converger le postérieur vers une probabilité de 1 en faveur de cette hypothèse.

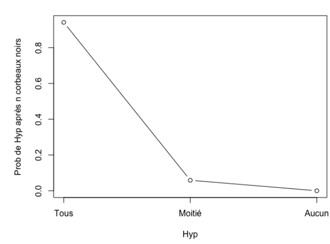
Voir n=0, =1,..., =4 corbeaux noirs



n=0



n=1



n=4

La règle de Bayes résout-elle le problème de l'induction ?

Il y a deux problèmes de l'induction : un problème psychologique (par quel mécanisme modifions nous nos degrés de croyance en une hypothèse), et un problème épistémologique (est-il rationnel de faire des inférences ampliatives ?)

La règle de Bayes résout-elle le problème de l'induction ?

Il y a deux problèmes de l'induction : un problème psychologique (par quel mécanisme modifions nous nos degrés de croyance en une hypothèse), et un problème épistémologique (est-il rationnel de faire des inférences ampliatives ?)

- S'agissant du problème de la justification psychologique de l'induction, on peut voir dans la règle de Bayes une description d'un processus d'apprentissage.
- Si on pense au problème de la justification épistémologique de l'induction, la réponse est plus complexe.